ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学
SGCライブラリ
103
For Senior & Graduate Courses

量子情報と時空の物理

量子情報物理学入門

堀田 昌寛　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-103

量子情報と時空の物理

量子情報物理学入門

堀田 昌寛　著

サイエンス社

まえがき

近年基礎物理学の分野で量子情報理論の様々なアイテムを用いた研究が進んでいる．例えばAdS/CFT対応において共形場理論での量子縺れ（量子エンタングルメント）が負の宇宙項を持つ時空での重力理論を用いて幾何学的に計算できる笠–高柳公式[1]の発見が世界的に大きな驚きを与えた．最近ではブラックホール蒸発の情報喪失問題でも量子計算や量子テレポーテーション，量子縺れの一夫一妻制（モノガミー）等の量子情報理論の概念を用いて議論されることが多い．物性理論においても量子縺れを用いたトポロジカル相の秩序パラメータの存在も知られるようになった[2][3]．また多スケール量子縺れ繰り込み仮設(MERA)[4]という，量子情報理論の知見に基づいた新しい繰り込み群の手法も注目を集めている．このような潮流を背景に日本の物理学研究者や大学院生の中でも量子情報理論のニーズが高まっている．そのニーズに少しでも応えられるように，本書では多くの物理的例を紹介しながら大学院レベルの量子情報物理学の入門的実用書を目指した．本書の前半は量子状態を認識論的情報概念として捉える現代的コペンハーゲン解釈をベースにしながら，量子縺れ等の量子情報理論の必須アイテムを解説している．後半は特に量子情報の時空に絡んだ物理学への応用を論じている．

前半の第1章から第4章までは主に量子情報理論の物理学研究者向けの入門に当てられる．第1章では「量子情報とは何か」というテーマを様々な具体例を挙げながら深める．第2章では量子測定理論の基礎を解説した．ここでは理想測定ではない一般的な測定の定式化が紹介される．また量子状態は情報的概念であり，持っている系の知識量に応じて測定者毎に異なってもいいことも強調される．量子状態にそのような測定者依存性があっても，各量子状態から予言される測定結果に関しては全く矛盾を出さない巧妙な理論構造を量子力学が保持していることも見る．第3章では量子縺れを定義するのに必要な局所的操作と古典通信(LOCC)の概念が導入される．また最も一般的な物理過程は量子通信路理論で使われる完全正値性写像という数学的概念で統一的に扱えることも述べる．第4章では量子縺れの操作論的定義から始まり，種々の量子縺れ指標が紹介される．後半の第5章から第9章までは量子情報が重要となる物理系とそのダイナミクスを扱う．第5章では測定による反作用が注目系の時間発展に影響を与える量子ゼノン効果について述べられる．第6章では量子場の真空状態において一様加速度運動をする測定者が熱浴を観測するウンルー効果を紹介し，その量子縺れの解析を行う．第7章ではブラックホールから放出されるホーキング輻射を情報理論的切り口から解析を行う．またブラックホール蒸発に関する情報喪失問題の最近の進展にも触れる．第8章では多体量子系の基底状態の量子縺れが負エネルギー領域を持つ量子状態を作り出すことが示される．また量子場における負エネルギーの性質とブラックホール蒸発における負エネルギー流も解説される．第9章では多体系基底状態の量子縺れを用いるとLOCCによって操作論的な意味でのエネルギー転送が可能となる量子エネルギーテレポーテーション(quantum energy teleportation,

QET) という量子プロトコルが解説される．情報量とエネルギーの非自明な関係とともに，ブラックホール蒸発過程に対して QET が導く新たな知見が紹介される．

本書では一般相対論や場の量子論の初等レベルの知識を前提にしている．なお紙面の関係上，多くの興味深い量子情報物理学の進展を取り上げることができなかった．ここでは扱われない内容については他の教科書や論文またはレビュー記事等で補ってほしい．

本書の内容は共同研究者を含む多くの方々との様々なテーマでの議論がもとになっている．特に森川雅博，細谷暁夫，高木伸，清水明，小澤正直，小嶋泉，木村元，筒井泉，市川翼，佐々木寿彦，松本啓史，遊佐剛，泉田渉，南部保貞，二間瀬敏史，高柳匡，田崎晴明，沙川貴大，渡辺優，布能謙，松本路朗，吉村太彦，William G. Unruh, Michael Frey, Timothy Byrnes, Holger F. Hofmann, Saverio Pascazio の各氏との議論は本書に大きな影響を与えている．ここに記して感謝の意を表す．また松本路朗，木村元，佐々木寿彦の各氏には原稿前半部分についても目を通してもらって，貴重なご意見を頂いた．合わせて感謝したい．また本書を出版するにあたり，原稿の段階から出版までご苦労をおかけした平勢耕介氏を初めとするサイエンス社「数理科学」編集部の皆様に感謝する．最後に，執筆を陰ながら支えてくれた妻に感謝する．

2013 年 9 月

堀田 昌寛

目 次

第 1 章
量子情報と量子状態

この章では情報理論的視点を強調した現代的コペンハーゲン解釈の立場から，量子情報の本質を概観していく．なおこのテキストでは一貫して自然単位系 $(c = \hbar = k_B = 1)$ を採用する．

1.1 量子ビットと量子情報

日常の会話で交換される情報は言語によって表現されている．この情報は通信や情報処理においてよく行われるように 0 と 1 からなる数列によっても表現できる．例えば 26 文字から成るアルファベットで書かれた文章は各文字に割り当てられるアルファベット順の番号 (a だったら 1，z だったら 26) を 2 進法表示することで a=00000, b=00001, c=00010, d=00011,$\cdots$, z = 11010 と表現できる．2 進法では 5 桁の数列で 32 種類の異なる文字を記述できる．様々な 5 桁の 2 進数を並べて繋ぐとより長い 2 進数列を生成できるが，それを用いることで全ての文章が数値化される．このような 2 進数列は古典ビット列 (classical bit sequence) と呼ばれる．古典情報とはこのような古典ビット列で記述可能な全ての情報を指す．一方，量子力学の状態重ね合わせの原理を用いた量子ビット列 (quantum bit sequence) というものも存在する．量子ビット (quantum bit, 略して qubit) とは 2 準位系として扱える量子系のことである．電子のスピンや光子の偏光は量子ビット系の典型例であるが，他にも多準位系の特定の 2 準位だけに注目して量子ビットとみなせる場合もある．古典ビットでは 0 か 1 かのどちらかのはっきりした値しかとれなかったが，量子ビットでは 0 と 1 どちらでもない重ね合わせ状態が可能であるのが特徴である．2 次元ヒルベルト空間のある直交基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を考え，その基底ベクトルをそれぞれのビット値の 0 と 1 に対応させたとしよう．量子力学でもこの直交しあう 2 つの状態ははっきり区別できるため，古典ビットの状態と同様の性質を持っている．ところが量子力学では更に $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ を満たす 2 つの複素数を用いて

$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ という重ね合わせ状態も存在する．これは0とも1とも確定しない古典的には実現できなかった状態である．2値しかとれなかった古典ビットの状態と大きく異なり，c_0, c_1 の自由度のために連続無限個の種類がある．この量子ビットを直線状に並べた合成系の量子状態を量子ビット列と呼ぶ．量子ビット列は，例えば n という添え字で区別される個々の量子ビットの量子状態の密度演算子 $\hat{\rho}_n$ をテンソル積として並べた $\prod_n \otimes \hat{\rho}_n$ という形の状態に限定されず，より一般的な量子状態も含まれる．その代表的な例が後述する量子縺れ状態 (entangled state) である．これらの量子状態が持つ情報，即ち量子ビット列で記述される情報を一般的に量子情報と呼ぶ．なお古典情報は量子情報の特殊な例とみなせる．例えば N 個の量子ビットの合成系の量子状態が $\hat{P}(0) = |0\rangle\langle 0|$，$\hat{P}(1) = |1\rangle\langle 1|$ 及び

$$p(b_1 b_2 \cdots b_N) \geq 0, \qquad \sum_{b_1=0}^{1}\sum_{b_2=0}^{1}\cdots\sum_{b_N=0}^{1} p(b_1 b_2 \cdots b_N) = 1$$

を満たす古典確率分布関数 $p(b_1 b_2 \cdots b_N)$ を用いて

$$\hat{\rho}_N = \sum_{b_1=0}^{1}\sum_{b_2=0}^{1}\cdots\sum_{b_N=0}^{1} p(b_1 b_2 \cdots b_N) \left[\prod_{n=1}^{N} \hat{P}_n(b_n)\right]$$

という密度演算子で書ける場合を考えよう．ここで $\hat{P}_n$ の添え字 n は n 番目の系には $\hat{P}$ が作用し，他の部分系には恒等演算子が作用するという演算子であることを示している．以下では演算子の同様の表記を多用する．この $\hat{\rho}_N$ が持っている情報は古典的と言える．それは古典ビット列 $(b_1 b_2 \cdots b_N)$ で指定される全ての素状態 $\prod_{n=1}^{N} \hat{P}_n(b_n)$ は演算子として互いに可換であり，各量子ビットに対して物理量 $\hat{P}(1) = |1\rangle\langle 1|$ の理想測定を順次行ってその測定結果を並べると対応する $(b_1 b_2 \cdots b_N)$ を正しく再現できるためである．もし特定の古典ビット列に対してのみ $p(b_1 b_2 \cdots b_N)$ が1をとり，他の成分が0であるならば，$\hat{\rho}_N$ は確定的な古典情報を持っている．また情報量においても $\hat{\rho}_N$ のフォンノイマン (von Neumann) の量子エントロピーは $p(b_1 b_2 \cdots b_N)$ に対するシャノン (Shannon) の古典エントロピーに一致する．

$$-\operatorname{Tr}\left[\hat{\rho}_N \ln \hat{\rho}_N\right] = -\sum_{b_1 b_2 \cdots b_N} p(b_1 b_2 \cdots b_N) \ln p(b_1 b_2 \cdots b_N).$$

1.2 量子状態が導く頻度主義的確率と単発測定における客観情報

量子状態 $|\psi\rangle$ にある量子系 S に対してエルミート演算子 $\hat{A}$ で記述される物理量を理想測定することを考えてみよう．$\hat{A}$ の固有値 a_n が観測される確率 p_n は

対応する固有状態 $|n\rangle$ と $|\psi\rangle$ を用いてボルン則 (Born rule) から $p_n = |\langle n|\psi\rangle|^2$ と計算される．実験的には p_n は多数回測定を繰り返して得られる事象頻度の極限として与えられる．このため量子状態自身も同一量子系を多数並べた集合に対してか，または 1 つの量子系に同じ状態を作り続けて何回も測定を繰り返す場合に対してしか定義されないと誤解されやすい．量子状態はただ 1 個の量子系に対してただ 1 回の測定をする単発測定 (single-shot measurement) を行う場合でも意味のある概念である．例えば 1 個の S に対して $\hat{A}$ の理想測定を 1 回行って特定の固有値 a_{n_o} を観測したとすると，その測定後の状態は必ず $|n_o\rangle$ である．この事実は同じ理想測定を連続して行っても必ず a_{n_o} が観測されることで確認できる．実験的にも通常この性質を使って状態準備が行われている．前節で述べた古典情報を書き込んだ（符号化した）純粋状態の量子ビット列に対して，各量子ビット毎に 1 回の測定を行うだけで情報を正しく解読（復号化）できる．例えば 1 つの量子ビット列

$$|0\rangle|1\rangle|1\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle\cdots|1\rangle$$

に対して $\hat{b} = |1\rangle\langle 1|$ という物理量を各量子ビットで 1 回だけ測り，得られた測定値を並べれば，もとの古典ビット列 $(011010\cdots 1)$ が正しく再現できる．ここで 2 つの実数パラメータ θ, ϕ で指定される

$$|\psi_0\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle, \tag{1.1}$$

$$|\psi_1\rangle = \sin\theta|0\rangle - e^{i\phi}\cos\theta|1\rangle \tag{1.2}$$

という別な直交基底を用いて 0 を $|\psi_0\rangle$ に，1 を $|\psi_1\rangle$ に対応させると $(011010\cdots 1)$ は同様に

$$|\psi_0\rangle|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle|\psi_0\rangle|\psi_1\rangle|\psi_0\rangle\cdots|\psi_1\rangle$$

という量子ビット列で符号化することもできる．これも $\hat{b}_\psi = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ という物理量を各量子ビットで 1 回だけ測定してその測定値を並べれば正しく復号化できる．ここで (1.1) 式の θ, ϕ の値を自由にとれば，$|\psi_0\rangle$ は任意の量子ビットの状態 $|\psi\rangle$ と一致させられる．従って単発測定に関しても量子状態 $|\psi\rangle$ を考えることには意味がある．なお各ビット毎に $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ と $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$ のうちどちらかの基底をランダムに選択して古典ビット列を量子的に符号化すれば，量子暗号 (quantum cryptography) を作ることも可能である [5]．量子暗号は古典暗号ではできない盗聴検出を可能にする最も安全な暗号化法として知られている．このように多数の同一量子系全体だけでなく，ただ 1 個の量子系にも量子状態を割り当てることは応用面からも大変有益なのである．

1.3 量子状態トモグラフィ

量子情報理論では量子状態を混合状態まで含めて数学的に統一して扱うために，密度演算子 $\hat{\rho}$ で量子状態を記述することが多い．一般に $\hat{\rho}$ は次の性質を満たす演算子である．

(1) $\hat{\rho}$ はエルミート演算子： $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$.

(2) エルミート演算子 $\hat{\rho}$ の固有値は負にはならない．： $\hat{\rho} \geq 0$.

(3) $\hat{\rho}$ は確率の規格化条件を満たす．： $\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}] = 1$.

ここで条件 (2) の行列不等式 $\hat{\rho} \geq 0$ は $\hat{\rho}$ が非負演算子 (non-negative operator) であることを意味し，任意の状態ベクトル $|\varphi\rangle$ に対して $\langle\varphi|\hat{\rho}|\varphi\rangle \geq 0$ が成り立つことを指し，$\hat{\rho}$ がエルミートでその全ての固有値が非負であることを意味する数学の表記である．純粋状態の場合にはベクトル表示 $|\psi\rangle$ だけでなく $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ という密度演算子表示も使用する．

通常の教科書では波動関数や量子状態が量子系の記述において最も基礎的な概念であるとする場合も多い．しかしこれは量子状態が誰にとっても普遍的意味のある客観的実在であるということを意味していない．認識論的解釈としての現代的コペンハーゲン解釈の立場から言うと，量子状態は様々な物理量の測定値がとる確率分布の集合と等価であり，個々の測定者が系に対してアクセスできる情報の総体である．そして測定者毎に異なっても構わない．この解釈を後節に渡って順序だてて説明していこう．

最初に簡単のために 2 準位系を考えよう．その一般的な量子状態 $\hat{\rho}$ は長さが 1 以下の 3 次元実ベクトル $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ を用いて

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + u_1\hat{\sigma}_1 + u_2\hat{\sigma}_2 + u_3\hat{\sigma}_3\right) \tag{1.3}$$

と書ける．これは量子状態のブロッホ表示 (Bloch representation) として知られている．ここで $\hat{I}$ は単位行列であり，$\hat{\sigma}_k$ はパウリ行列である．しばしば $\hat{\sigma}_0 = \hat{I}$ という表記も用いて，統一的に下記のように書くこともある．

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$|\vec{u}| = 1$ を満たす場合，$\hat{\rho}$ は純粋状態を表す．$\hat{\rho}$ が与えられると任意の物理量の測定値の確率分布が導かれる．例えば $\hat{\sigma}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ の 3 つの物理量の理想測定を行った場合に得られる値はそれぞれ ± 1 であるが，その確率分布は以下のように計算される．

$$p_k(\pm 1) = \frac{1}{2}(1 \pm u_k).$$

量子状態 $\hat{\rho}$ から確率分布 $p_k(\pm 1)$ を求めることはよく行われることだが，ポイン

トは $p_k(\pm 1)$ から $\hat{\rho}$ を一意的に再現できることである．つまり $\hat{\sigma}_k$ の多数回測定を行うことで確率分布 $p_k(\pm 1)$ が求められ，そして平均値 $\langle \hat{\sigma}_k \rangle = p_k(+1) - p_k(-1)$ から $u_k = \langle \hat{\sigma}_k \rangle$ という関係を通じて u_k を求められる．その結果 $\hat{\rho}$ も (1.3) 式から一意的に決定される．このことから，情報量が同じという意味において，量子状態 $\hat{\rho}$ は確率分布の集合 $\{p_k(\pm 1) | k = 1, 2, 3\}$ と等価と言える．この関係を

$$\hat{\rho} \approxeq \{p_k(\pm 1) | k = 1, 2, 3\}$$

と表そう．もちろん量子状態と等価な確率分布の集合を与える物理量の選択は他にも無数にあり，同等である．

同様のことは連続量子系でも言える．例えば 1 次元空間を運動する点粒子の量子状態 $\hat{\rho}$ の場合でも以下の関係が知られている．$[\hat{q}, \hat{p}] = i$ を満たす粒子の位置演算子 $\hat{q}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を考えよう．そして長さの次元を持つ定数 l と角度変数 θ を用いて $\hat{A}(\theta) = \hat{q}\cos\theta + l^2 \hat{p}\sin\theta$ と定義される物理量を考える．この固有値は連続的に分布しており，その確率密度分布は

$$P(\theta, a) = \mathrm{Tr}\left[\delta\left(\hat{A}(\theta) - a\right)\hat{\rho}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} da' \delta\left(a' - a\right) \langle a', \theta | \hat{\rho} | a', \theta \rangle = \langle a, \theta | \hat{\rho} | a, \theta \rangle$$

と計算され，$\int_{-\infty}^{\infty} P(\theta, a) da = 1$ を満たす．ここで $|a', \theta\rangle$ は $\hat{A}(\theta)$ の連続固有値 a' に対応する固有状態である．$P(\theta, a)$ が実験的に確定すると以下の公式によって $\hat{\rho}$ も一意的に決定することができる．

$$\begin{aligned} \langle \bar{q} | \hat{\rho} | q \rangle = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} da P\left(\mathrm{arccot}\left(l^2 \frac{u}{\bar{q} - q}\right), a\right) \\ &\times \exp\left[i\left(a\sqrt{u^2 + \left(\frac{\bar{q} - q}{l^2}\right)^2} - \frac{\bar{q} + q}{2} u\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで $|q\rangle$ は $\hat{q}$ の固有値 q に対応する固有状態である．((1.4) 式の証明は付録 A 参照．) この結果から 1 次元空間内の点粒子の場合も，量子状態 $\hat{\rho}$ は測定値の確率密度分布の集合と情報量の観点から等価であることが分かる．

$$\hat{\rho} \approxeq \{P(\theta, a) | 0 \leq \theta < \pi\}.$$

一般に物理量の測定値の確率分布から量子状態 $\hat{\rho}$ を再構築することは量子状態トモグラフィー (quantum state tomography) と呼ばれている．

ここで相関関数と量子状態の関係性にも触れておく．

$$\chi(q, p) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\exp\left(ip\hat{q} - iq\hat{p}\right)\right]$$

で定義される特性関数を引数 q, p に関して何回か偏微分して $(q, p) = (0, 0)$ と置くと，$\hat{q}, \hat{p}$ の多項式から作られるエルミート演算子の相関関数が生成される．例えば

$$\partial_q \partial_p \chi(0, 0) = \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\left(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}\right)\hat{\rho}\right]$$

等の相関関数が計算できる．$\chi(q,p)$ を知ればこのような全ての相関関数は計算可能である．つまり $\chi(q,p)$ は状態 $\hat{\rho}$ に対する相関関数の生成母関数である．逆にもし $\hat{q},\hat{p}$ の多項式演算子の全ての相関関数を実験で決定できるとテーラー展開の式を用いて $\chi(q,p)$ も一意に定まる．さらに $\chi(q,p)$ は

$$
\begin{aligned}
\chi(q,p) &= \mathrm{Tr}\left[\exp\left(ip\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}q\hat{p}\right)\hat{\rho}\exp\left(-\frac{i}{2}q\hat{p}\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{ipq'} \langle q'|\exp\left(-\frac{i}{2}q\hat{p}\right)\hat{\rho}\exp\left(-\frac{i}{2}q\hat{p}\right)|q'\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{ipq'} \langle q' - \frac{q}{2}|\hat{\rho}|q' + \frac{q}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

とも計算されるため，逆フーリエ変換を使って $\chi(q,p)$ から $\hat{\rho}$ を以下のように一意的に計算することができる．

$$
\langle \bar{q}|\hat{\rho}|q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi\left(q-\bar{q},p\right)\exp\left(-\frac{i}{2}p\left(\bar{q}+q\right)\right)dp.
$$

従って $\hat{\rho} \approxeq \chi(q,p)$ が成り立つが，同時に $\hat{\rho}$ の持っている情報と $\hat{q},\hat{p}$ の多項式演算子の相関関数の集合が持つ情報も等価である．迂遠であるが多数の相関関数を実験等で決定していけば，原理上はどんな $\hat{\rho}$ が実現しているかを確かめることができる．

1.4 混合状態の純粋化

一般的量子状態として本テキストでは混合状態まで含む密度演算子 $\hat{\rho}$ を扱うとしたが，任意の混合状態はより大きな量子系での純粋状態としての表記が常に可能である．それは混合状態の**純粋化**（ピュリフィケイション，purification）として知られている．考えている量子系 S のヒルベルト空間の次元 N_S と同じかそれより大きな次元のヒルベルト空間を持つ補助系 (ancilla system) R を考えよう．S のある密度行列 $\hat{\rho}_S$ のスペクトル分解を

$$
\hat{\rho}_S = \sum_{n=1}^{N_s} p_n |n\rangle_S \langle n|_S
$$

と書こう．この時 R のヒルベルト空間の中の互いに直交する N_S 本の任意の単位ベクトル $|u_n\rangle_R$ $(n = 1 \sim N_S)$ を使って

$$
|\Psi\rangle_{SR} = \sum_{n=1}^{N_s} \sqrt{p_n}|n\rangle_S|u_n\rangle_R \tag{1.5}
$$

という状態を定義すると，

$$
\hat{\rho}_S = \mathrm{Tr}_R\left[|\Psi\rangle_{SR}\langle\Psi|_{SR}\right]
$$

という関係が満たされる．つまり図 1.1 にあるように，$\hat{\rho}_S$ は $|\Psi\rangle_{SR}\langle\Psi|_{SR}$ に対

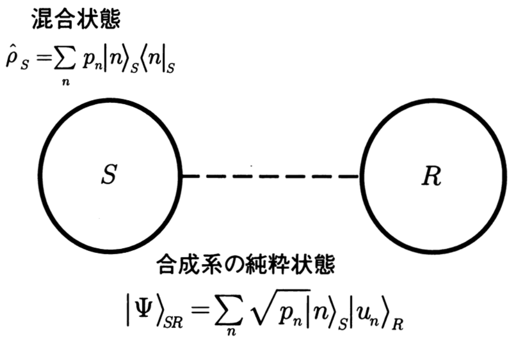


図 1.1　混合状態にある物理系 S は他の量子系 R との合成系を考えることによって必ず純粋状態で記述できる．

して R に関する部分トレースをとった縮約状態 (reduced state) であることが分かる．(1.5) 式の純粋状態 $|\Psi\rangle_{SR}$ は $\hat{\rho}_S$ に対して一意ではなく，R のヒルベルト空間内の $\{|u_n\rangle_R\}$ に対するユニタリー変換の自由度が残されている．(1.5) 式の形をしている状態は SR 系のヒルベルト空間では特別なものではなく，任意の純粋状態がシュミット分解 (Schmidt decomosition) により必ず (1.5) 式の形に書けることも思い出しておこう.（シュミット分解の証明は付録 B を参照.）混合状態 $\hat{\rho}_S$ を作るどんな実験装置や実験者でも, それを外部系 R とみなして (1.5) 式の関係を満たすマクロな純粋状態 $|\Psi\rangle_{SR}$ に設定することは原理的レベルで常に可能である．

混合状態は解析に便利な側面もあるが，混合状態が記述している部分量子系の局所的操作だけを使用する前提でのみ正しい答えを出す．外部系と繋がる非局所的操作を行う場合には縮約状態だけを見ていても扱えない不思議な相関も現れることに注意が必要である．第 4 章の量子テレポーテーションの節ではこのような現象の例を具体的に論じる．従って本来量子状態はその記述が純粋状態になるまで系を十分に拡大させてから，他の状態との差異を論じるべき概念なのである．

混合状態 $\hat{\rho}_S$ はいろいろな方法で用意できるが，例えば確率的に出力数値を吐き出すダイスを使って生成することも可能である．しかしこの場合ですらも，より大きな量子系の純粋状態を S へ縮約したものがこの $\hat{\rho}_S$ であるとみなせる．例えば 1 から N の自然数を値としてとる離散変数 μ が確率 p_μ で生成される物理的なダイスを考えよう．N は S のヒルベルト空間の次元 N_S より大きくてもいい．ある値 μ が出力すればこれに対応する状態 $|\mu\rangle_S$ を S 系に用意する．異なる μ に対応する $|\mu\rangle_S$ 同士は互いに直交していなくても構わない．この過程で平均的に生成される混合状態 $\hat{\rho}_S$ は

$$\hat{\rho}_S = \sum_{\mu=1}^{N} p_\mu |\mu\rangle_S \langle\mu|_S \tag{1.6}$$

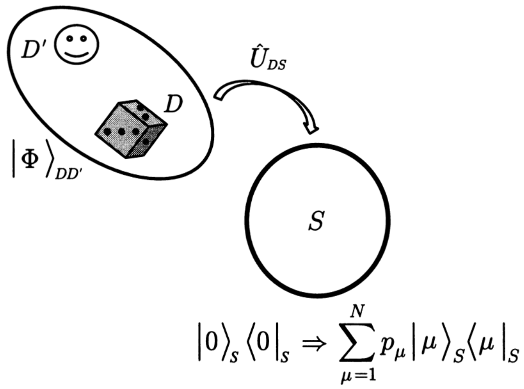


図 1.2 量子ダイスの概念図．注目系 S において状態を確率的に発生させて平均化することによって混合状態を作る過程も，純粋状態にあるマクロな量子ダイス系 DD' を考えればユニタリー過程として記述できる．

で与えられる．ここで使用された物理的ダイスも実際にはマクロな量子系である．そしてダイスとそれを振る機械や人間との合成系に対しても，マクロな純粋状態を考えることは原理的にできる．この見方をした時に先のダイスを量子ダイス (quantum dice) と呼ぶことにし，量子系 D と表記しよう．そして量子ダイス D の初期状態を純粋化するマクロな外部補助系を D' と呼ぶことにする．この場合ダイスを振って S の混合状態 $\hat{\rho}_S$ を作る操作は図 1.2 のようにユニタリー過程で記述できる．ダイスを含めた合成系 DD' の始状態を純粋状態 $|\Phi\rangle_{DD'}$ としよう．それをシュミット分解して，一般性を失わずに

$$|\Phi\rangle_{DD'} = \sum_{\mu=1}^{N} \sqrt{p_\mu} |d_\mu\rangle_D |v_\mu\rangle_{D'}$$

という形にできる．ここで $\{|d_\mu\rangle_D\}$ は D のある完全正規直交系であり，$|v_\mu\rangle_{D'}$ は D' 系の互いに直交する N 個の単位ベクトルである．この状態で D の

$$\hat{O}_D = \sum_{\mu=1}^{N} \mu |d_\mu\rangle_D \langle d_\mu|_D$$

という物理量の理想測定を行うと，D は確率 p_μ で目の値 μ を出力する量子ダイスであることが分かる．特に $p_\mu = 1/N$ と置けば完全乱数を生成する．一般にヒルベルト空間の次元 N 以下の N' 個の互いに直交する状態ベクトルを N' 個の互いに直交する別な状態に変換するユニタリー演算子 $\hat{U}$ は常に存在する．従って S のある純粋状態 $|0\rangle_S$ を用いた $\{|0\rangle_S|d_\mu\rangle_D\}$ という基底を $\{|\mu\rangle_S|d_\mu\rangle_D\}$ という基底に移すユニタリー演算子 $\hat{U}_{DS}$ も常に存在する．

$$\hat{U}_{DS}|0\rangle_S|d_\mu\rangle_D = |\mu\rangle_S|d_\mu\rangle_D. \tag{1.7}$$

このユニタリー変換を合成系 SDD' での始状態 $|0\rangle_S|\Phi\rangle_{DD'}$ に作用させると量

子的に振ったダイスの出力値 μ の情報が S に移り，

$$|\Phi'\rangle_{SDD'} = \hat{U}_{DS}|0\rangle_S|\Phi\rangle_{DD'} = \sum_{\mu=1}^{N} \sqrt{p_\mu}|\mu\rangle_S|d_\mu\rangle_D|v_\mu\rangle_{D'}$$

という結果を得る．そして DD' に関して部分トレースをとれば，(1.6) 式の混合状態 $\hat{\rho}_S$ が確かに生成されている．

$$\hat{\rho}_S = \operatorname*{Tr}_{DD'}\left[|\Phi'\rangle_{SDD'}\langle\Phi'|_{SDD'}\right] = \sum_{\mu=1}^{N} p_\mu|\mu\rangle_S\langle\mu|_S.$$

このように通常の古典的確率過程としてのダイス振りでも，マクロな量子外部系を扱うことによって純粋状態でのユニタリーな記述が原理的に可能となる．なお $|\Phi'\rangle_{SDD'}$ は S 系と DD' 系に対する以下のシュミット分解で表すこともちろん可能である．

$$|\Phi'\rangle_{SDD'} = \sum_{n=1}^{N_S} \sqrt{p'_n}|n\rangle_S|u_n\rangle_{DD'}$$

ここで p'_n は $\hat{\rho}_S$ の固有値で，$|n\rangle_S$ はその固有状態である．$|u_n\rangle_{DD'}$ は N_s 個の直交し合う DD' 系の状態ベクトルである．一般に p_μ と p'_n は異なり，$\{|\mu\rangle_S\}$ も $\{|n\rangle_S\}$ とは異なることに注意が必要である．

1.5 量子情報のアイデンティティ

古典情報の特徴の一つとして正確な複製生成が容易にできる点が挙げられる．量子情報の特殊な例としての古典情報という観点からでもこの性質は保たれている．例として制御量子ビット (controlled qubit) と呼ばれる量子ビット C と標的量子ビット (target qubit) と呼ばれる量子ビット T と 2 つからなる合成系 CT を考えよう．そしてこの合成系のヒルベルト空間に作用する

$$\begin{aligned}\hat{U}^{(CNOT)} &= |0\rangle_C\langle 0|_C\left(|0\rangle_T\langle 0|_T + |1\rangle_T\langle 1|_T\right) \\ &\quad + |1\rangle_C\langle 1|_C\left(|1\rangle_T\langle 0|_T + |0\rangle_T\langle 1|_T\right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

というユニタリー演算子を考える．ここで $|0\rangle_C\langle 0|_C$ や $|1\rangle_C\langle 1|_C$ は C のヒルベルト空間に $|0\rangle\langle 0|$ や $|1\rangle\langle 1|$ という射影演算子を作用させ，T のヒルベルト空間には単位演算子 $\hat{I}$ を作用させる CT 系の演算子である．この表記ルールに基づいているためテンソル積記号 $\otimes$ は省略されている．C の添え字の付いた演算子と T の添え字の付いた演算子は全て可換である．(1.8) 式の $\hat{U}^{(CNOT)}$ を実装する量子デバイスは量子制御ノットゲート (quantum controlled NOT gate) と呼ばれて，量子計算 (quantum computation) の基礎的な素子になっている [6]．標的ビットの始状態を $|0\rangle_T$ とし，制御ビットの始状態を互いに直交している $|0\rangle_C$ か $|1\rangle_C$ かのどちらかとしよう．このような始状態に $\hat{U}^{(CNOT)}$ を作用さ

せてやると

$$\hat{U}^{(CNOT)}|0\rangle_C|0\rangle_T = |0\rangle_C|0\rangle_T, \qquad \hat{U}^{(CNOT)}|1\rangle_C|0\rangle_T = |1\rangle_C|1\rangle_T$$

という結果を得る．ここで注目されるのは，C がどちらの状態にあろうとも C の状態は保存され，一方 T の終状態は C の状態に完全に一致している点である．これは制御ビットに書かれていた古典情報を標的ビットに複製をしたともみなせる．例えば制御ビットと標的ビットの対が N 個あれば，合成ユニタリー演算子 $\left(\hat{U}^{(CNOT)}\right)^{\otimes N}$ を使って確定的古典情報に対応する N 量子ビット列の複製機が作れる．実際 $b_n = 0$ か $b_n = 1$ で符号化されている古典ビット列 $(b_1 b_2 \cdots b_N)$ に対応する制御ビットの状態 $|b_1\rangle_{C_1}|b_2\rangle_{C_2}\cdots|b_N\rangle_{C_N}$ と標的ビットの状態 $|0\rangle_{T_1}|0\rangle_{T_2}\cdots|0\rangle_{T_N}$ をこの複製機に入力すれば

$$\begin{aligned}&\left(\hat{U}^{(CNOT)}\right)^{\otimes N}\left(|b_1\rangle_{C_1}|b_2\rangle_{C_2}\cdots|b_N\rangle_{C_N}\right)\left(|0\rangle_{T_1}|0\rangle_{T_2}\cdots|0\rangle_{T_N}\right)\\&=\left(|b_1\rangle_{C_1}|b_2\rangle_{C_2}\cdots|b_N\rangle_{C_N}\right)\left(|b_1\rangle_{T_1}|b_2\rangle_{T_2}\cdots|b_N\rangle_{T_N}\right)\end{aligned}$$

となり，2 つの同じ古典ビット列に対応する出力状態を得る．この制御 NOT ゲートには $|0\rangle_C$ と $|1\rangle_C$ との一般的重ね合わせ状態 $|\psi\rangle_C = c_0|0\rangle_C + c_1|1\rangle_C$ を入力することもできるが，残念ながらこの時には標的ゲートの出力状態は

$$\hat{U}^{(CNOT)}|\psi\rangle_C|0\rangle_T = c_0|0\rangle_C|0\rangle_T + c_1|1\rangle_C|1\rangle_T$$

となり，$|\psi\rangle_C|\psi\rangle_T$ という直積状態には一般にならない．つまり制御 NOT ゲートは一般的な量子状態 $|\psi\rangle$ に対する普遍的なコピー機にはなれないのだ．この重ね合わせ状態の複製不可能性という事実は，実は $\hat{U}^{(CNOT)}$ の形の特殊性を超えて量子力学のユニタリティに基づいて一般的に主張することができる．複製の原本となる状態 $|\psi\rangle$ が書き込まれている量子系 S とその複製が作られる量子系 S'，そしてコピー機として働く量子デバイス等を含む補助量子系 D の合成系を考えよう．S と S' のヒルベルト空間の次元は同じとし，D はいくらでも大きな量子系で構わないとする．このコピー機はこの合成系のヒルベルト空間に $\hat{U}_{SS'D}$ という演算子を演算する働きがあるとしよう．合成系 $S'D$ の始状態は $|\psi\rangle$ に依存しないとし，これを $|0\rangle_{S'D}$ と書く．$\hat{U}_{SS'D}$ が任意の状態 $|\psi\rangle$ に対する複製を実現することを要求すると

$$\hat{U}_{SS'D}|\psi\rangle_S|0\rangle_{S'D} = |\psi\rangle_S|\psi\rangle_{S'}|\phi\rangle_D \tag{1.9}$$

という関係が満たされる．ここで $|\phi\rangle_D$ は一般に $|\psi\rangle$ に依存してもよい D の純粋状態である．ここで直交しない異なる 2 つの量子状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ の複製を考えよう．各々に対して

$$\hat{U}_{SS'D}|\psi_1\rangle_S|0\rangle_{S'D} = |\psi_1\rangle_S|\psi_1\rangle_{S'}|\phi_1\rangle_D, \tag{1.10}$$

$$\hat{U}_{SS'D}|\psi_2\rangle_S|0\rangle_{S'D} = |\psi_2\rangle_S|\psi_2\rangle_{S'}|\phi_2\rangle_D \tag{1.11}$$

が成り立つ．$\hat{U}^{\dagger}_{SS'D}\hat{U}_{SS'D}=\hat{I}$ から

$$\langle\psi_1|_S\langle 0|^{\dagger}_{S'D}\hat{U}^{\dagger}_{SS'D}\hat{U}_{SS'D}|\psi_2\rangle_S|0\rangle_{S'D}=\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

という関係が導かれるが，一方 (1.10) 式と (1.11) 式の右辺の状態の内積をとると

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|_S\langle 0|^{\dagger}_{S'D}\hat{U}^{\dagger}_{SS'D}\hat{U}_{SS'D}|\psi_2\rangle_S|0\rangle_{S'D}&=(\langle\psi_1|_S\langle\psi_1|_{S'}\langle\phi_1|_D)(|\psi_2\rangle_S|\psi_2\rangle_{S'}|\phi_2\rangle_D)\\&=\langle\psi_1|\psi_2\rangle^2\langle\phi_1|\phi_2\rangle\end{aligned}$$

という関係も同時に得られるため，$\langle\psi_1|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|\psi_2\rangle^2\langle\phi_1|\phi_2\rangle$ という結果を得る．ここで $\langle\psi_1|\psi_2\rangle\neq 0$ という仮定から $\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_2\rangle=1$ という関係が満たされる．両辺の絶対値の 2 乗をとると，

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2\,|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2=1$$

を得るが，2 つの状態が一致しないという仮定 ($|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2<1$) から

$$|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2=\frac{1}{|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}>1$$

が導かれてしまう．これは $|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2\leq 1$ という事実と矛盾し，(1.9) 式を満たす $\hat{U}_{SS'D}$ は存在しないことが一般的に証明される．この事実は**量子複製禁止定理** (quantum no-cloning theorem) と呼ばれている [7]．

完全な量子状態の複製が作れない事実には情報学的背景がある．例えば極めて稀にしか起きない素粒子反応を考えよう．その反応を引き起こす相互作用の微小結合定数 g の大きさを実験で知りたい．とりあえず 1 回だけ素粒子同士を反応させて g に依存した終状態 $|\psi(g)\rangle$ を 1 つ得たとしよう．もちろんこの状態を直接測っても，統計が少なすぎて g の値は確定しない．しかし $|\psi(g)\rangle$ に量子コピー機を作用させて 2 つの同じ状態 $|\psi(g)\rangle^{\otimes 2}$ を生成できたとしよう．更にできた 2 つに量子コピー機を作用させると同じ状態が 4 つになる．これを繰り返せば，1 回だけの素粒子反応の実験から無限個の $|\psi(g)\rangle$ を得ることになる．生成された $|\psi(g)\rangle^{\otimes\infty}$ という状態の際立った特徴は，$|\psi(g)\rangle$ が各部分系の純粋状態であるために無限個の独立で同一な試料が用意されてしまう点にある．これらを個々に測定してデータを集積すれば無限の精度で g の値は決定してしまう．ところがこれはあり得ない．もともとの 1 つの $|\psi(g)\rangle$ に含まれていた g の情報を超えて，大量の g の情報を得ることはないのである．実際量子パラメータ推定理論のクラメール–ラオ不等式というのがあって，g の推定誤差には原理的下限が存在している [8]．この理論によると最初の 1 個の $|\psi(g)\rangle$ に任意の物理的操作を施して多体系量子状態を作っても，その状態に含まれる g の情報量はもともと 1 つの $|\psi(g)\rangle$ に含まれていた g の情報量を超えることはない．従って無限の精度で g が決定されることはありえない．このことから完全な量子状態

のコピーを無限個つくる量子デバイスは存在しないことが分かる．

量子複製禁止定理は混合状態にも拡張されることが知られている．コピーの原本である S の任意の状態を $\hat{\rho}$ とし，コピーが作られる S' 側の始状態を $\hat{\rho}$ に依存しない $\hat{\omega}$ としよう．この合成系の始状態 $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\omega}_{S'}$ が $\hat{\rho}$ に依らない量子操作の後に $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_{S'}$ という状態になれば，混合状態に対するコピー機が存在することになる．もう少し条件を緩めて量子状態の複製を定義することもできる．操作後の状態が S と S' の直積状態 $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_{S'}$ にならずに $\hat{\Omega}_{SS'}$ という状態になっても，

$$\hat{\rho}_S = \operatorname*{Tr}_{S'}\left[\hat{\Omega}_{SS'}\right], \qquad \hat{\rho}_{S'} = \operatorname*{Tr}_{S}\left[\hat{\Omega}_{SS'}\right] \tag{1.12}$$

という関係が成り立てば実質的に $\hat{\rho}$ の複製が実現すると言ってもよい．例えば S と S' が離れた場所にあって，$\hat{\Omega}_{SS'}$ に対して S と S' の各領域内の局所的操作しか使用できないとすると，$\hat{\Omega}_{SS'}$ と $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_{S'}$ は原理的に区別ができなくなるからである．(1.12) 式の緩い条件の複製法は，$\hat{\rho}$ に含まれる情報の複製広域配布として放送的な意味づけもできる．このため (1.12) 式を満たす量子操作は量子ブロードキャスティング (quantum broadcasting) とも呼ばれる．なお量子ブロードキャスティングは $\hat{\Omega}_{SS'} = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_{S'}$ となる量子複製も特殊例として含む，より広い概念である．興味深いことに，実は非可換な 2 つの混合状態を送る完全な量子ブロードキャスティングも不可能であることが証明されている [10]．完全複製を作れる古典情報とは異なり，これらの禁止定理は量子情報にとても強いアイデンティティがあることを示している．

上記の禁止定理は任意の状態 $\hat{\rho}$ の完全な複製をつくる操作がないことを述べているが，近似的な複製生成自体は禁止されていない．例えば S と S' の始状態 $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\omega}_{S'}$ をある物理的操作をして

$$\hat{\rho}_S \otimes \hat{\omega}_{S'} \ \rightarrow\ \hat{\Omega}'_{SS'}$$

という状態変化を起こすとしよう．この時，各部分系の縮約状態が

$$\hat{\rho}'_S = \operatorname*{Tr}_{S'}\left[\hat{\Omega}'_{SS'}\right], \qquad \hat{\rho}'_{S'} = \operatorname*{Tr}_{S}\left[\hat{\Omega}'_{SS'}\right]$$

のように同じ $\hat{\rho}'$ という状態を生成することは可能である．但し原本の入力状態 $\hat{\rho}$ と複製として生成された状態 $\hat{\rho}'$ は一致せずに必ずずれる．入力状態が純粋状態 $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ の場合，1 個の $\hat{\rho}$ から近似的な複数のコピー $\hat{\rho}'$ を作る時の複製忠実度を

$$F = \langle\psi|\hat{\rho}'|\psi\rangle$$

で定義しよう．これは仮に $\hat{\rho}$ と $\hat{\rho}'$ とが一致した場合には $F = 1$ をとる量である．一般的な近似複製操作において F は $|\psi\rangle$ に依存するが，特定の量子プロトコルを用いると任意の入力状態に対して同じ忠実度 F を与えることができる．

このプロトコルは普遍的量子クローニング (universal quantum cloning) と呼ばれる．その具体例は，第 3 章 3.4 節で紹介する．1 個の量子ビット状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ からその近似複製 $\hat{\rho}'$ を無限個作る場合，その忠実度には

$$F \leq \frac{2}{3} \tag{1.13}$$

という上限がある [11]．またこの最適値 2/3 は 1 個の $|\psi\rangle\langle\psi|$ を測定して得られる測定結果に基づいて近似複製を作る古典的手法で達成することが知られている [12]．つまり $|\psi\rangle$ の中に含まれている複製可能な古典情報の部分を読み出して無限個の近似状態を作るという手法でこの最適忠実度が達成されてしまう．$|\psi\rangle$ の中の純粋に量子的な情報部分が $\hat{\rho}'$ から完全に抜け落ちているからこそ，$\hat{\rho}'$ は無限個生成することができているのである．なおこの量子ビットが担える古典情報量の最大値を示す $F = 2/3$ という値は後の量子縺れや量子テレポーテーションの議論にも現れて，興味深い役目を演じている．

第 2 章
量子測定

2.1 ポインター基底測定

コペンハーゲン解釈における量子測定の様々な特徴を見るために，まずは簡単でかつ量子測定の本質を深く捉えているポインター基底測定 (pointer basis measurement) を紹介しよう [13]．これはフォンノイマン (von Neumann) によって初めて導入されたもので，ポインターとはマクロな測定器のメーターの針を指す．興味のある量子系 S の物理量 $\hat{A}_S$ を測りたい時に，実数上の値 x を表示するメーターが備えられている仮想的測定機 D を用意しよう．そして D の量子状態 $|\phi\rangle_D$ をメーターの針の位置 x に関する基底での波動関数 $\phi_D(x) = \langle x|\phi\rangle_D$ で表す．単純化のために D の他の内部自由度は無視しよう．この針の位置を表す状態の集合 $\{|x\rangle\}$ はポインター基底と呼ばれ，この測定モデルの名前の由来になっている．簡単のために S と D の各々の自由ハミルトニアンはないと仮定する．(測定の時間スケールが S と D の自由運動の時間スケールに比べて圧倒的に短かい場合を考えていると思ってもよい.) このような設定で物理量 $\hat{A}_S$ を測りたければ，測定に関わる以下の相互作用ハミルトニアンを考えれば良い．

$$\hat{H}_m(t) = g(t)\hat{A}_S\hat{p}_D \tag{2.1}$$

ここで $\hat{p}_D$ は針の位置座標に共役な運動量演算子である．また $g(t)$ は測定時間内だけ非ゼロになる S と D の間の相互作用の結合定数である．ここでも作用する量子系の添え字を演算子記号に加えて，S のヒルベルト空間に作用する $\hat{A}_S$ を S と D の合成ヒルベルト空間に作用する $\hat{A}\otimes\hat{I}$ とみなし，D のヒルベルト空間に作用する $\hat{p}_D$ を $\hat{I}\otimes\hat{p}$ とみなしている．$\left[\hat{A}_S, \hat{p}_D\right] = 0$ のように作用するヒルベルト空間が異なる場合の演算子の交換関係は消える．この表記は本テキスト全体に適用される．測定の相互作用をする前の S の状態を $|\psi\rangle_S$ という純粋状態とし，メーターの針の始状態を位置の中心値が原点にあって量子的揺らぎの幅が ϵ である

$$\phi_{D0}(x) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}\Theta\left(\frac{\epsilon}{2} - |x|\right) \tag{2.2}$$

としよう．ここで $\Theta(x)$ はヘビサイドの階段関数 $(\Theta(x>0)=1, \Theta(x<0)=0)$ である．また $g(t)$ を時刻 $t=0$ から $t=T$ までの間だけ非零の一定値 g をとり，それ以外の時刻には零であるとしよう．時刻 T 以降の合成系の状態は $\hat{U}_{PBM} = \exp\left[-igT\hat{A}_S\hat{p}_D\right]$ という時間発展演算子を用いて

$$|\Phi, x\rangle_{SD} = \hat{U}_{PBM}|\psi\rangle_S\phi_{D0}(x) = \exp\left[-gT\hat{A}_S\partial_x\right]|\psi\rangle_S\phi_{D0}(x) \tag{2.3}$$

と求められる．ここで $\hat{A}_S$ の固有値を a_n とし，その固有状態を $|a_n\rangle_S$ とすると，$\hat{A}_S$ のスペクトル分解は

$$\hat{A}_S = \sum_n a_n|a_n\rangle_S\langle a_n|_S$$

で与えられる．(簡単のために固有値が離散的で縮退のない場合を考えている．)
(2.3) 式にこれを代入すると

$$\sum_n |a_n\rangle_S\langle a_n|\psi\rangle_S \exp\left[-gTa_n\partial_x\right]\phi_{Do}(x) = \sum_n \langle a_n|\psi\rangle_S|a_n\rangle_S\phi_{D0}(x-gTa_n)$$

と計算される．そして

$$c_n = \langle a_n|\psi\rangle_S, \qquad u_n(x) = \phi_{D0}(x-gTa_n) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}\Theta\left(\frac{\epsilon}{2} - |x-gTa_n|\right)$$

と置くことにより

$$|\Phi, x\rangle_{SD} = \sum_n c_n|a_n\rangle_S u_n(x) \tag{2.4}$$

という形にかける．したがって異なる固有値の差の最小値に対して

$$gT > \frac{\epsilon}{\min_{n\neq n'}|a_n - a_{n'}|} \tag{2.5}$$

を満たす g と T を選べば，それぞれの針の位置 $x \in \left[gTa_n - \frac{\epsilon}{2}, gTa_n + \frac{\epsilon}{2}\right]$ は十分に離れて区別できるようになり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)^* u_{n'}(x)dx = \delta_{nn'}$$

が成立する．従って (2.4) 式の右辺において直交し合う針の状態 $u_n(x)$ と $\hat{A}_S$ の値 a_n との間に完全な相関が生まれたことになる．つまりメーターの測定により 1 つの $u_n(x)$ が観測されると，それは $\hat{A}_S$ が a_n の値をとっていることを意味する．この相関は量子測定の本質の一つである．$|a_n\rangle u_n(x)$ は合成系のヒルベルト空間での直交する量子状態でもあるため，ある $u_n(x)$ が観測される確率は a_n が観測される確率に等しく，(2.4) 式から

$$p_n = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\langle a_n|u_n(x)^*|\Phi, x\rangle dx\right|^2 = |c_n|^2 = |\langle a_n|\psi\rangle_S|^2$$

と計算される．これはちょうど，$|\psi\rangle_S$ という状態にある $\hat{A}_S$ を理想測定した時の確率分布に一致している．つまり (2.5) 式の関係を満たすポインター基底測定は理想測定の一種である．

(2.5) 式を満たしたまま $T \to 0, g \to \infty$ という極限がとれるため，任意の物理量は原理的には無限に短い時間間隔で正確に測定できることが分かる．これは $\hat{A}_S$ がなんらかのエネルギーだったとしても同じである．測定時間とエネルギー測定の誤差に関してはボーアとアインシュタインの論争以来，不確定性関係が存在するという誤解が流布しているが，エネルギーも原理的には無限に短い測定時間で精密に測れる．

2.2 量子測定における現代的コペンハーゲン解釈のいくつかの本質的側面

前節のポインター基底測定を用いながら，コペンハーゲン解釈における量子測定の本質的ないくつかの側面を説明する．具体性を持たせるために注目系である S を 2 準位スピン系（量子ビット系）にして，測る物理量をパウリ演算子の第 3 成分 $\hat{\sigma}_3$ としよう．1 つの S 系が測定者アリスの前にあり，その状態が $\hat{\sigma}_3|\pm\rangle_S = \pm|\pm\rangle_S$ を満たす $\hat{\sigma}_3$ の固有ベクトル $|\pm\rangle_S$ を用いて

$$|\psi\rangle_S = c_+|+\rangle_S + c_-|-\rangle_S$$

と書かれているとしよう．そして始状態 $|0\rangle_D$ にある測定機 D にポインター基底測定の相互作用を S とさせて

$$\hat{U}^{(vN)}_{SD}|\psi\rangle_S|0\rangle_D = c_+|+\rangle_S|u_+\rangle_D + c_-|-\rangle_S|u_-\rangle_D \tag{2.6}$$

という状態を作ろう．$\hat{U}^{(vN)}_{SD}$ はこの測定を記述するユニタリー演算子である．この状況を図 2.1 で表した．ここで

$$T > \frac{\epsilon}{2g} \tag{2.7}$$

が成り立てば，測定機の状態 $|u_+\rangle_D$ と $|u_-\rangle_D$ は互いに直交している．図 2.2 のようにアリスが D を理想測定して状態 $|u_\pm\rangle_D$ が観測されれば，ミクロな系である S の状態は測定結果に応じて $|\pm\rangle_S$ であることが分かる．コペンハーゲン解釈では**公理として**各結果の出現は確率的であるとし，その確率はボルン則

$$p_+ = \left|\langle +|_S\langle u_+|_D \left(\hat{U}^{(vN)}_{SD}|\psi\rangle_S|0\rangle_D\right)\right|^2 = |c_+|^2, \tag{2.8}$$

$$p_- = \left|\langle -|_S\langle u_-|_D \left(\hat{U}^{(vN)}_{SD}|\psi\rangle_S|0\rangle_D\right)\right|^2 = |c_-|^2 \tag{2.9}$$

で与えられる．

コペンハーゲン解釈では複数の測定者が 1 つの同じ量子系を見ていても，持っ

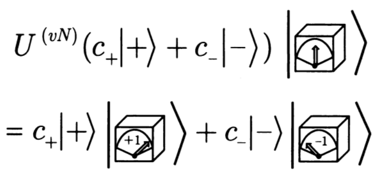


図 2.1 ポインター基底測定の概念図．注目系の量子ビットとマクロな測定機をユニタリーな相互作用をさせることによって量子ビットの情報が測定機のマクロな針（ポインター）の位置の状態に転写される．

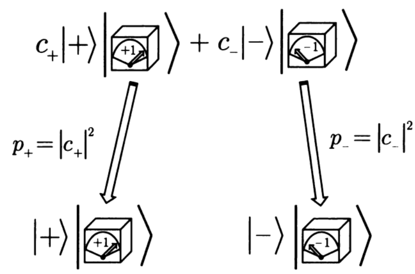


図 2.2 ポインター基底測定の概念図．ユニタリーな相互作用の結果作られた量子ビットと測定機のマクロな重ね合わせ状態において，測定機のマクロな針（ポインター）の位置の状態を理想測定する．針の位置と量子ビットのスピンの向きは完全相関しているため，針の位置の測定は量子ビットのスピンの理想測定とみなせる．針の位置の測定結果の出現確率は量子ビットの初期状態でボルン則から計算されるスピンの測定結果の出現確率と一致している．

ている情報に応じて測定者各々にとっての量子状態が異なる場合がある．しかしこの 1 つの系に対して彼らがどんな測定を試みても矛盾が起きない理論構造であるのが特徴である．これを理解するために，アリスが測定機 D のメーターの針を読み取る過程をもう少し詳しく考えてみよう．測定機に近寄ってメーターに当たっている光の反射を捉える視覚，メーターを手で触れてどの位置に針があるかを確認する触覚，測定器からの音を聴く聴力等を通じて，アリスは測定機の情報を自分の脳の記憶領域に移行させた後に測定機から離れる．この情報転写のプロセスは複雑ではあるが，基本的にはどれも電磁相互作用が基本となっている．電磁相互作用は量子電磁力学 (QED) というユニタリーな理論で記述される．そこで量子ビット S だけでなく，測定機 D 及びアリスを表すマクロな量子系 A まで含めた合成系 SDA を観測する第 2 の測定者ボブを考えよう．アリスが測定機の針の位置を確かめてその結果を記憶する過程も，ボブにとっては多数の素粒子からなる物理系間の電磁相互作用から生成されるユニタリー変換 $\hat{U}^{(em)}_{DA}$ として捉えられる．もちろん実際に素粒子レベルから $\hat{U}^{(em)}_{DA}$ を構築するのは大変なため，まずは概念を捉えるためにマクロなレベルで期待される性質を課してこの過程をモデル化してみよう．最も単純なモデルは A をアリスの脳の記憶領域で代表させ，しかもそれをマクロ状態な 2 準位 $|+\rangle_A$，$|-\rangle_A$ か

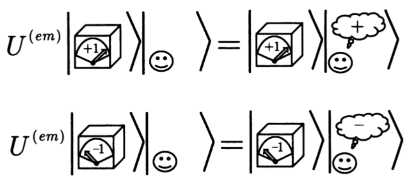


図 2.3　測定者が測定機の針の位置を読み取る過程を記述するモデル．針の位置が $+1$ という結果ならば測定者の記憶領域に $+1$ という測定結果が転写される．針の位置が -1 ならば記憶も -1 となる．

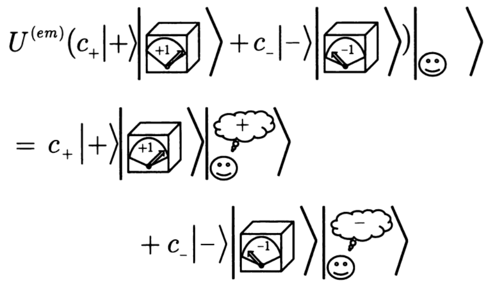


図 2.4　マクロな重ね合わせ状態にある量子ビットと測定機の合成系を観測する測定者自体も量子的に扱える．測定者が測定機の針を読み取るための相互作用をすると，量子ビット，測定機，測定者のなす合成系もマクロな重ね合わせ状態になる．

ら成る量子ビット系で近似するものである．A は初期には $|0\rangle_A$ という量子状態にあったとする．(2.7) 式の関係を仮定すると $\langle u_+|u_-\rangle_D = 0$ から

$$\hat{U}_{DA}^{(em)}|u_+\rangle_D|0\rangle_A = |u_+\rangle_D|+\rangle_A, \qquad \hat{U}_{DA}^{(em)}|u_-\rangle_D|0\rangle_A = |u_-\rangle_D|-\rangle_A$$

という性質を満たすユニタリー演算子 $\hat{U}_{DA}^{(em)}$ が存在する．この状況を図 2.3 で表した．この性質から分かるように $\hat{U}_{DA}^{(em)}$ には測定機 D の量子状態を乱すことなく，その中の情報を正確に A へ書き込む作用がある．そこで単純なモデルとして，この $\hat{U}_{DA}^{(em)}$ をアリスがメーターを見る相互作用を記述する時間発展演算子とみなそう．アリスが測定機の結果を確認した後の SDA の合成系の量子状態は

$$\hat{U}_{DA}^{(em)}\hat{U}_{SD}^{(vN)}|\psi\rangle_S|0\rangle_D|0\rangle_A = c_+|+\rangle_S|u_+\rangle_D|+\rangle_A + c_-|-\rangle_S|u_-\rangle_D|-\rangle_A \tag{2.10}$$

で与えられる．右辺の 2 つの項は，アリスが測定機を確認して結果を知り，アリスの記憶の中の S の量子状態の情報を $|\pm\rangle_S$ に更新する事象に対応している．ボブが SDA の合成系を測定をしなければボブにとってはこの純粋状態が実現している．この状況を図 2.4 で表した．測定で情報を得たアリスにとっては注目系 S だけで $|+\rangle_S, |-\rangle_S$ どちらかの純粋状態になっているが，ボブにとって S は D, A の量子系全てを集めて初めて純粋状態となる．このように個人によっ

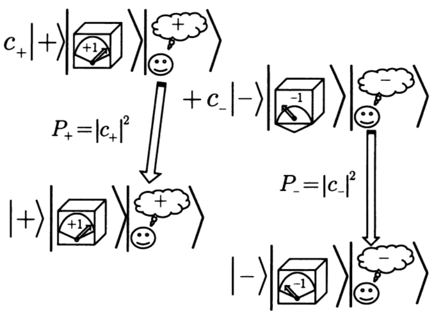


図 2.5 量子ビット，測定機，測定者のマクロな重ね合わせ状態で測定者が記憶している測定結果を測定者に問うことは，その測定者の量子状態の測定であると同時に測定機の針の位置と量子ビットのスピンの測定とみなせる．ここでのモデルでは 3 つの系は完全相関しているため，測定者が +1 と答える確率は，測定機の針の位置が +1 の状態にある確率及び量子ビットのスピンが +1 の状態にある確率と一致する．−1 の場合でも同様である．

て S の量子状態は異なっている．図 2.5 のようにもしボブがアリスに S のことを訊ねた場合（A を測定してそのメモリ領域の情報を知った場合），結果が + である確率は

$$\left| \langle + |_S \langle u_+ |_D \langle + |_A \left(\hat{U}_{DA}^{(em)} \hat{U}_{SD}^{(vN)} |\psi\rangle_S |0\rangle_D |0\rangle_A \right) \right|^2 = |c_+|^2$$

であり，− の確率は

$$\left| \langle - |_S \langle u_- |_D \langle - |_A \left(\hat{U}_{DA}^{(em)} \hat{U}_{SD}^{(vN)} |\psi\rangle_S |0\rangle_D |0\rangle_A \right) \right|^2 = |c_-|^2$$

となる．これはちょうどアリスが S の測定で得る (2.8) 式，(2.9) 式の確率分布と確かに一致する．しかし更に外側にいる第 3 の測定者クリスにとってはボブもこの時点で観測対象に取り込まれており，S は D と A 及びボブを記述する系である B まで拡大した合成系 $SDAB$ における純粋状態になる．そしてこのような外部測定者の連鎖的設定は図 2.6 のように際限なく続けることができる．この連鎖をフォンノイマン鎖 (von Neumann chain) と呼ぶこともある．連鎖した系は図 2.7 のようにマクロな線形重ね合わせ状態になる．連鎖する測定者のそれぞれが得る測定結果の確率分布はこのモデルでは全て一致することが確認できる．更にもう少し精密なモデルでも同じ結果を得る．脳の記憶領域を含めたアリス全体を表す物理系 A は 2 準位系ではなく本来大きな次元を持つヒルベルト空間を持つマクロな量子系として記述される．例え + か − かの 1 ビットの情報を記憶領域に記憶するだけでも，ミクロレベルやマクロレベルで異なる多数の量子状態を使用している．その膨大に縮退している状態を区別する添え字 k を加えて $|+, k\rangle_A, |-, k\rangle_A$ と表記しよう．また測定機の状態も同様に，その縮退している量子状態を区別する μ という添え字を加えて $|u_+, \mu\rangle_D, |u_-, \mu\rangle_D$ と状態を表記しよう．添え字の異なる状態は全て互いに直交している．D と A

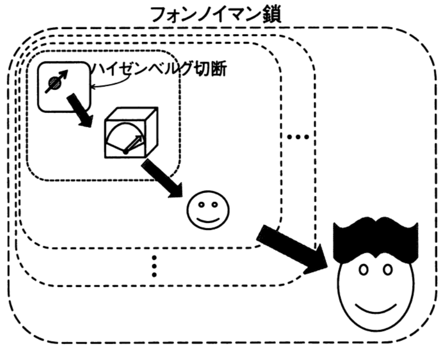


図 2.6 フォンノイマン鎖とハイゼンベルグ切断の概念図．一旦マクロ系にミクロ系の情報が転写されてしまうと，そのマクロ系を測定する他のマクロ系まで取り入れた合成系を考えてもミクロ系の測定結果の読み出し確率は変化しない．更にそのマクロ系の合成系を外部から観測する測定者を順次考えても同様である．最初のミクロ系とマクロ系間の直接相互作用だけは測定過程において欠くことができない．このミクロとマクロの境界をハイゼンベルグ切断と呼ぶ．

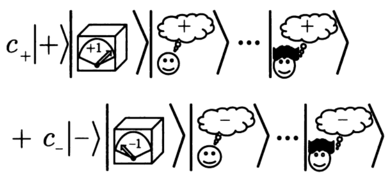


図 2.7 フォンノイマン鎖におけるマクロな状態重ね合わせ．

の始状態をそれぞれ $|0\rangle_D$, $|0'\rangle_A$ と書くと，± の 1 ビットの情報を誤差なく S から測定機 D，そしてアリスの量子系 A へと複製していく $\hat{U}_{SD}^{(vN)}$ と $\hat{U}_{DA}^{(em)}$ は次のような性質を課すことでモデル化できる．

$$\hat{U}_{SD}^{(vN)}|\pm\rangle_S|0\rangle_D = \sum_{\mu} m_{\mu}^{(1)}|\phi_\pm,\mu\rangle_S|u_\pm,\mu\rangle_D, \tag{2.11}$$

$$\hat{U}_{DA}^{(em)}|u_\pm,\mu\rangle_D|0'\rangle_A = \sum_{\mu' k} m_{\mu\mu' k}^{(2)}|u_\pm,\mu'\rangle_D|\pm,k\rangle_A. \tag{2.12}$$

ここで $m_{\mu}^{(1)}, m_{\mu\mu' k}^{(2)}$ は複素数の値を持つそれぞれの展開係数である．なお $|\phi_\pm,\mu\rangle_S$ は測定値 $\pm,\mu$ が観測された場合の S の測定後状態である．理想測定でない場合には ± や μ が異なっていても $|\phi_\pm,\mu\rangle_S$ は一般には互いに直交しない．$\hat{U}_{DA}^{(em)}$ の操作が終わった後の SDA の状態は

$$|\Omega_\pm\rangle_{SDA} = \sum_{\mu\mu' k} m_{\mu}^{(1)} m_{\mu\mu' k}^{(2)}|\phi_\pm,\mu\rangle_S|u_\pm,\mu'\rangle_D|\pm,k\rangle_A$$

を用いて

$$\hat{U}_{DA}^{(em)}\hat{U}_{SD}^{(vN)}|\psi\rangle_S|0\rangle_D|0'\rangle_A = c_+|\Omega_+\rangle_{SDA} + c_-|\Omega_-\rangle_{SDA} \tag{2.13}$$

と書ける．ここでのポイントは，アリスと測定機のミクロな縮退を考慮しても(2.11) 式，(2.12) 式のように情報伝達の誤差がない場合には $\langle\Omega_+|\Omega_-\rangle = 0$ が成り立つため，測定結果の確率は (2.8) 式，(2.9) 式の結果と変わらない点にある．この一般的なモデルを考えても，S のミクロ状態 $|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$ が (2.13) 式で表される SDA のヒルベルト空間の中の 2 次元部分空間内のマクロ状態に写像されることが本質的である．現実の過程を記述する $\hat{U}_{SD}^{(vN)}$ や $\hat{U}_{DA}^{(em)}$ は大変複雑である．しかし情報転写の誤差が無視できる過程ならばここで述べたモデルと基本的構造は変わらない．フォンノイマン鎖の中のどの測定者にとっても測定確率は (2.8) 式，(2.9) 式で与えられる [13]．

上での議論から，量子ビット S から測定機へ，測定機からアリスへと続く測定の連鎖の中で，S の測定が終了したと考えられる時刻はこの連鎖の後方にいくらでも移動可能である．逆に連鎖の前方への移動には限界がある．例えば $0 < t < \epsilon/(2g)$ の領域では $|u_+\rangle_D$ と $|u_+\rangle_D$ は直交せず，完全には区別がつかない．つまりその時間領域では明らかにまだ S の測定は終わっていない．注目系から測定機に情報が移動して書き込まれる際に，情報の異なる測定機状態が十分に区別できるようになる前と後とでは量子状態は質的に異なる．この前後の間の境界はハイゼンベルグ切断 (Heisenberg cut) とも呼ばれることもある．フォンノイマン鎖において S の測定終了時刻をいくらでも後の時刻に移せる不定性があるために，所謂 “波動関数の収縮” が客観的物理過程で説明できないことも明らかである．また相対性理論からもこれが客観的現象でないことが分かる．(2.10) 式の状態のままアリス A は測定機 D から十分に離れたボブのいる場所に移動したとしよう．そしてボブがアリスから測定結果を聞いた瞬間に測定機 D や量子ビット S の状態は収縮する．その時にボブの脇をクリスが一定速度で通過しているとしよう．そしてクリスもボブと一緒にアリスから測定結果を聞いたとする．しかし異なる慣性系における同時刻の相対性により，クリスにとって D と S の状態が収縮する時刻は一般にボブの時刻と異なるのだ．この事実も測定による量子状態の収縮が客観性のある物理過程ではないことを示している．むしろ量子状態そのものを実在論的概念ではなく，認識論的情報概念として捉える現代的コペンハーゲン解釈と自然に整合している．

(2.10) 式で表されているボブにとっての量子状態は純粋状態であり，$|M_+\rangle_{SDA} = |+\rangle_S|u_+\rangle_D|+\rangle_A$ というマクロ状態と $|M_-\rangle_{SDA} = |-\rangle_S|u_-\rangle_D|-\rangle_A$ というマクロ状態の間の量子干渉効果の存在を示している．どちらの状態でもアリスが $+$ か $-$ かの結果を 1 つだけはっきりと体験して記憶している状態である．これはシュレーディンガーの猫の思考実験と同様の状況になっている．(2.10) 式の例でもシュレーディンガーの猫の例でも，マクロな重ね合わせ状態を作ること自体は常に容易であることを意味している．乱暴な言い方をすると，放っておいてもそれはできてしまう．難しいのはこのマクロ状態の間の干渉効果を実験で観測することである．それには観測するのにふさわしい物理量を測定する

実験が要求される．例えば

$$|\Psi\rangle_{SDA} = c_+|M_+\rangle_{SDA} + c_-|M_-\rangle_{SDA} \tag{2.14}$$

というボブが見ている SDA の量子状態に対しては

$$\hat{O}^{(macro)}_{SDA} = |M_+\rangle_{SDA}\langle M_-|_{SDA} + |M_-\rangle_{SDA}\langle M_+|_{SDA}$$

という物理量を測定をすれば $|M_+\rangle_{SDA}$ と $|M_-\rangle_{SDA}$ との間の干渉効果を実測することが可能である．$c_+ = 1/\sqrt{2}, c_- = e^{i\theta}/\sqrt{2}$ とすると

$$\langle\Psi|_{SDA}\hat{O}^{(macro)}_{SDA}|\Psi\rangle_{SDA} = \cos\theta$$

となり，θ の変化に応じて干渉縞が観測できる．しかしこの $\hat{O}^{(macro)}_{SDA}$ の理想測定は大変難しいことも以下の議論から分かる．結果が $-$ に確定している $|M_-\rangle_{SDA}$ という状態に対して $\hat{O}^{(macro)}_{SDA}$ を測定すれば確率 1/2 で固有値 ± 1 が観測される．その測定後状態は

$$|\Psi_\pm\rangle_{SDA} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|M_+\rangle_{SDA} \pm |M_-\rangle_{SDA}\right)$$

となる．$|M_\pm\rangle_{SDA}$ は人の記憶や猫の生死が確定しているマクロで“古典的な”状態であるため，$|\Psi_\pm\rangle_{SDA}$ のどちらの状態に対しても $|M_+\rangle_{SDA}$ であるか $|M_-\rangle_{SDA}$ であるかを確認する実験は非常に容易である．$|\Psi_\pm\rangle_{SDA}$ の状態でこの確認を行うと，結果として半分の確率で $|M_+\rangle_{SDA}$ が出現してしまう．シュレーディンガーの猫の設定において $|M_-\rangle_{SDA}$ を猫が死んでいる状態，$|M_+\rangle_{SDA}$ を猫が生きている状態としよう．すると猫が死んでいる状態 $|M_-\rangle_{SDA}$ においてこの測定プロセスを実行すると猫が生きている状態 $|M_+\rangle_{SDA}$ が 50% の確率で測定後に作られることになる．つまり $\hat{O}^{(macro)}_{SDA}$ を用いた干渉実験を実現する技術は死んだ猫を 50% の確率で生き返らせる技術と同程度に難しいと言える．これは猫を構成している全ての原子分子をミクロレベルで操作して死の状態を生の状態に戻すマクロな時間反転を実現させる過程であるため，マクロ系のエントロピー増大則を破る希少過程である．従って原理上は可能であるが，現実的には測定者や猫を含んだ系の量子干渉効果を観測することは大変難しい．更にマクロ状態の重ね合わせに関わっているどんなに些細な自由度も実験的に制御して，量子コヒーレンスを保つ必要もある．例えばアリスの身体から出るただ 1 つの波長の長い光子 (soft photon) さえも監視しなくてはならない．もしこの 1 つの光子を見落とすと量子デコヒーレンス (quantum decoherence) が起きて，干渉効果は決して確認できなくなる．アリスの状態 $|\pm\rangle_A$ をアリスから出るミクロな 1 つの光子 γ の偏極状態 $|\gamma_\pm\rangle$ とそれ以外のマクロな系 M' の状態 $|M'_\pm\rangle_{M'}$ に分けられるとしよう．この時に合成系の状態は

$$|\Psi\rangle_{SDM'\gamma} = c_+|+\rangle_S|u_+\rangle_D|M'_+\rangle_{M'}|\gamma_+\rangle_\gamma + c_-|+\rangle_S|u_+\rangle_D|M'_-\rangle_{M'}|\gamma_-\rangle_\gamma$$

と書ける．$\langle\gamma_+|\gamma_-\rangle = 0$ とすると，実験でこの光子 γ を捕らえなければ残りの系の縮約状態は 2 つのマクロ状態の混合状態

$$\operatorname*{Tr}_{\gamma}\left[|\Psi\rangle_{SDM'\gamma}\langle\Psi|_{SDM'\gamma}\right] = |c_+|^2 \left(|+\rangle_S|u_+\rangle_D|M'_+\rangle_{M'}\right)\left(\langle+|_S\langle u_+|_D\langle M'_+|_{M'}\right) + |c_-|^2 \left(|-\rangle_S|u_-\rangle_D|M'_-\rangle_{M'}\right)\left(\langle-|_S\langle u_-|_D\langle M'_-|_{M'}\right)$$

となって，マクロな量子コヒーレンスは完全に消滅してしまう．つまりマクロな干渉効果を実験したければ，あらゆるミクロな自由度も制御する必要がある．これも現実的には実現が大変困難である理由の一つである．

しかしこれまで孤立系の自由度を大きくした時に量子的重ね合わせが原理的レベルから消滅すること示した実験は存在していない．ミクロな量子系とマクロな古典系を分ける系の自由度の大きさに関する特定の有限閾値も多体系の量子力学の定式化には現れない．またマクロ系とまでは言えないが，サッカーボール構造を持つ高分子であるフラーレン (C_{60}) の 2 重スリット実験で干渉縞が観測できるようになったり，メソスコピックサイズの超伝導量子干渉素子の電流の向きが異なる 2 つの状態間の干渉効果も容易に実験で測定できるようになった．つまり原理的思考実験として有限自由度のマクロな系の干渉効果を論ずること自体は実験的にも理論的にも問題はない現状にある．ではアリスを含む (2.14) 式のマクロな重ね合わせ状態でボブが干渉実験を行うと，測定結果が 1 つに確定した体験をしているアリスには何が起きるのだろうか．実験ではアリスの記憶領域もミクロレベルからの制御の対象になり，干渉実験前にアリスが持っていた測定結果の記憶も書き換えを受けるだけでなく，干渉実験中には確定しないものになると考えられる．実験後にはマクロな状態 $|M_\pm\rangle_{SDA}$ のどちらかにアリスは戻されるが，実験時間中の中心的な記憶は欠落する．更に干渉実験終了後にボブがアリスに問うと先の S の測定結果についてはやはり $+$ か $-$ かの 1 つを答えるはずだが，その結果がアリスが干渉実験前に体験していた真実の結果と一致する保証もない．コペンハーゲン解釈は安定した記憶や意識を持つ測定者が 1 つの事象を認識，体験できる前提で論じられるものであり，実験中のアリスはこの条件を満たさない．そのためこの思考実験はアリスの体験に関してある種の相補性を提供する．アリスの意識があるうちに S の測定で体験した内容を答えさせると量子的重ね合わせは壊れて，その後マクロな干渉効果は観測できない．逆にアリスを対象とした干渉実験を先に行えば，S の測定においてアリスが体験した真実は失われ，実験後にアリスに尋ねても信用できる返答は得られない．

コペンハーゲン解釈では，なぜ確率的に測定結果が現れて測定者に認識されるのかについては不問に付す．これをむしろ原理，公理として扱うことがコペンハーゲン解釈の肝であり，量子状態を実在論的概念として捉える多世界解釈 [14] とは立場が大きく異なる．多世界解釈では量子状態を全ての測定者を含む宇宙全体で考えるべきと主張し，それは測定によって収縮したりせず線形的でユニ

タリーなプロセスだけで時間発展が記述される．そして確率解釈のボルン則やその個々の測定結果を認識する測定者の意識の存在までも根源的な原理から導こうとする野心的な試みである．一方コペンハーゲン解釈では観測される系と意識を持った測定者の系との分離が常にできる前提があって初めて量子力学は定式化されると考える．一見するとコペンハーゲン解釈は多世界解釈に比べて"答えるべき"問題から逃げている不完全な理論のようにも見えるが，これは誤解である．そもそも確率概念やボルン則自体は意識のある測定者の体験を通じてのみ理論化されるものである．この前提である測定者の意識の有無やその創発は量子力学を含む科学では扱えないという事実がコペンハーゲン解釈の認識論的理解を支える本質の一つになっている．例えば自分以外の人間が自分と同様の意識や自由意思を保有しているかということ自体が，科学を超えた形而上学的な問いである．これは半導体等で作ったアンドロイドが本当の意味で自分のような意識を持たないかという問いが決して証明のできない形而上学的な問題であることと同様である．実際，脳波の測定や言葉を通じたコミュニケーション等だけでは相手が本当に意識や心のある存在なのか，それともあるプログラムで動いているアンドロイドなのかを区別つけることは原理的にできない．人間の五感を出発点にして様々な高度な道具，測定機を開発しながらこの世界の情報を収集して解析を行うのが科学である．そこで扱えるのは対象物に刺激を与えた時に起こる反応に関する情報だけであり，その情報をいくら集積しても相手に自分と同様な意識があるかどうかは答えようがない．従って注目系と分離した測定者が意識を持ってただ1つの事象を確率的に選択し体験し続ける事実に関して科学としてはその先の理由を求めることは不可能であり，公理としてしか扱いようがない．しかし将来作られるアンドロイドが本当に意識を持った存在だと仮定しても，彼らにとっての量子状態からの帰結は自分にとっての量子状態からの帰結と決して矛盾を起こさない理論構造を量子力学は持っているのだ．現代的コペンハーゲン解釈の量子力学は実在としての物理的対象物を扱うものではなく，世界の中の全ての存在を認識論的情報概念に還元して扱う理論とも言える．このことは同時に五感から進化した科学の極限形態であることも示唆している．

2.3 一般化された量子測定

実際の量子系に対して行われる測定では誤差を伴う場合や，測定後状態が測定された固有値に対する固有状態にならない場合が多い．理想測定とは異なるこのような**一般測定** (general measurement) は，**測定演算子** (measurement operator) や正演算子値測度 (positive operator valued measure, 略して**POVM**) という数学的道具を使って統一的に扱える [15]．一般測定はポインター基底測定のように注目系 S と測定機系 D を考えて相互作用させ，その後に測定機系の

マクロなメーターを理想測定することで記述できる．D には S と接触するプローブ系 P が含まれており，P が取得する S の信号は後続の D の信号増幅部分によりマクロ化し，メーターの針を動かす．D のメーターのヒルベルト空間の次元は P のヒルベルト空間の次元以上であるが，そのうちプローブ P と同じ次元の部分ヒルベルト空間の中だけに情報は書きこまれる．以降では D のヒルベルト空間の次元をプローブ系の次元と同じとし，それを N_D と書くことにする．ここで強調すべきことは，S のヒルベルト空間の次元 N_S と N_D は一致する必要がないという点である．$N_S < N_D$ の場合には，大きな D の自由度の一部分で S の自由度の情報を書き込むことができる．また $N_S > N_D$ の場合には，この測定で部分的にしか S の情報を D に取り込むことしかできない．それでもなんらかの S の情報を D のメーターから知ることが可能である．測定される S の未知の状態を $\hat{\rho}_S$ としよう．また D の始状態は既知とし，$\hat{\rho}_S$ には依存しないとする．それを $\hat{\omega}_D$ と書こう．合成系 SD の始状態はテンソル積として $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\omega}_D$ で与えられる．時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間だけ S と D は相互作用をするとし，その合成系の時間発展はユニタリー演算子 $\hat{U}_{SD}$ で与えられるとしよう．この相互作用中に D の状態は未知の状態 $\hat{\rho}_S$ に依存しながら時間発展をするため，$\hat{\rho}_S$ に含まれていた情報は測定機 D の状態に転写される．その情報量の多寡は $\hat{U}_{SD}$ と $\hat{\omega}_D$ に依存する．$\hat{U}_{SD}$ には S に関する信号を D の中でマクロレベルまで増幅する過程の効果も含まれている．相互作用が切れた後の合成系の状態は $\hat{U}_{SD}\left(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\omega}_D\right)\hat{U}_{SD}^{\dagger}$ で与えられる．この状態で D の物理量 $\hat{O}_D$ の理想測定を行う．$\hat{O}_D$ の固有値を O_n とし，対応する固有状態を $|n\rangle_D$ とする．ここで簡単のために固有値 O_n には縮退がないことを仮定しよう．測定機 D が O_n を出力をする確率は，密度演算子に対するボルン則から射影演算子 $\hat{I}_S \otimes |n\rangle_D\langle n|_D$ を用いて

$$p_n = \operatorname*{Tr}_{SD}\left[\left(\hat{I}_S \otimes |n\rangle_D\langle n|_D\right)\hat{U}_{SD}\left(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\omega}_D\right)\hat{U}_{SD}^{\dagger}\right] \tag{2.15}$$

と計算される．また理想測定なので O_n という測定結果を得た後の合成系の量子状態は左右から射影演算子をかけることと，密度行列 $\hat{\omega}_D$ のスペクトル分解

$$\hat{\omega}_D = \sum_{\mu} \omega_{\mu} |\mu\rangle_D\langle\mu|_D$$

を用いることで，

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{I}_S \otimes |n\rangle_D\langle n|_D\right)\hat{U}_{SD}\left(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\omega}_D\right)\hat{U}_{SD}^{\dagger}\left(\hat{I}_S \otimes |n\rangle_D\langle n|_D\right) \\
&= \sum_{\mu}\left[\left(\sqrt{\omega_{\mu}}\langle n|_D\hat{U}_{SD}|\mu\rangle_D\right)\hat{\rho}_S\left(\sqrt{\omega_{\mu}}\langle\mu|_D\hat{U}_{SD}^{\dagger}|n\rangle_D\right)\right] \otimes |n\rangle_D\langle n|_D \\
&= \sum_{\mu} \hat{M}_{n\mu S}\hat{\rho}_S\hat{M}_{n\mu S}^{\dagger} \otimes |n\rangle_D\langle n|_D
\end{aligned}$$

と計算できる．ここで

$$\hat{M}_{n\mu S} = \sqrt{\omega_\mu}\langle n|_D \hat{U}_{SD}|\mu\rangle_D \tag{2.16}$$

は SD の全ヒルベルト空間に作用する演算子 $\hat{U}_{SD}$ に対して，D のヒルベルト空間に対応する部分だけ D のブラベクトル $\langle n|_D$ とケットベクトル $|\mu\rangle_D$ で挟んだものである．従って S のヒルベルト空間にだけ作用する演算子であり，測定後の注目系の量子状態を与える役目をする．この $\hat{M}_{n\mu S}$ は**測定演算子** (measurement operator) と呼ばれ，測定機の性質，性能の情報が得られる量子測定理論で最も基礎的な概念の一つである．O_n の値が出力された後の S の状態は規格化まで考慮すると

$$\hat{\rho}_{nS} = \frac{1}{p_n}\sum_\mu \hat{M}_{n\mu S}\hat{\rho}_S\hat{M}^\dagger_{n\mu S}$$

で与えられる．また (2.15) 式の O_n の出力確率 p_n も $\hat{M}_{n\mu S}$ を使うと

$$p_n = \sum_\mu \operatorname*{Tr}_S\left[\hat{M}_{n\mu S}\hat{\rho}_S\hat{M}^\dagger_{n\mu S}\right] = \operatorname*{Tr}_S\left[\hat{\Pi}_{nS}\hat{\rho}_S\right]$$

と簡単に計算できる．ここで

$$\hat{\Pi}_{nS} = \sum_\mu \hat{M}^\dagger_{n\mu S}\hat{M}_{n\mu S}$$

は非負なエルミート演算子であり，正演算子値測度 (positive operator valued measure) と呼ばれる．測定後状態に興味がなく，ボルン則に基づいた測定結果の出現確率だけを求めたい場合には，ω_μ や測定演算子の詳細を知る必要はなく，$\hat{\Pi}_{nS}$ だけが分かれば計算できる．$\hat{\Pi}_{nS}$ はしばしば略されて POVM とも呼ばれる．またこれに由来して測定後状態に興味を持たない設定の一般測定のことを POVM 測定 (POVM measurement) と呼ぶ場合も多い．ミクロな対象である S の理想測定もこの間接的方法で実現する可能である．この場合の $\hat{M}_{n\mu S}$ はエルミートな射影演算子になる．しかし一般の測定では $\hat{M}_{n\mu S}$ はエルミート演算子でも射影演算子でもなくなることが大きな特徴である．$\hat{U}_{SD}$ のユニタリー性

$$\hat{U}^\dagger_{SD}\hat{U}_{SD} = \hat{I}_{SD}$$

と $|n\rangle_D$ に関する完全性の式

$$\sum_n |n\rangle_D\langle n|_D = \hat{I}_D$$

及び $\hat{\omega}_D$ の規格化条件

$$\sum_\mu \omega_\mu = 1$$

を使うと任意の測定演算子は

$$\sum_n \hat{\Pi}_{nS} = \sum_{n\mu} \hat{M}^\dagger_{n\mu S}\hat{M}_{n\mu S} = \hat{I}_S \tag{2.17}$$

という拘束条件を満たすことが以下のように示せる．

$$\begin{aligned}
\sum_n \hat{\Pi}_{nS} &= \sum_{n\mu} \hat{M}^\dagger_{n\mu S}\hat{M}_{n\mu S} \\
&= \sum_{n\mu} \omega_\mu \langle\mu|_D \hat{U}^{\dagger}_{SD}|n\rangle_D \langle n|_D \hat{U}_{SD}|\mu\rangle_D \\
&= \sum_{\mu} \omega_\mu \langle\mu|_D \hat{U}^{\dagger}_{SD}\left(\sum_n |n\rangle_D\langle n|_D\right)\hat{U}_{SD}|\mu\rangle_D \\
&= \sum_{\mu} \omega_\mu \langle\mu|_D \hat{U}^{\dagger}_{SD}\hat{U}_{SD}|\mu\rangle_D = \hat{I}_S\sum_\mu \omega_\mu \\
&= \hat{I}_S.
\end{aligned}$$

逆に，ある自然数 N_κ に対して

$$\sum_{\kappa=1}^{N_\kappa} \hat{M}^\dagger_{\kappa S}\hat{M}_{\kappa S} = \hat{I}_S \tag{2.18}$$

の関係を満たす任意の演算子 $\hat{M}_{\kappa S}$ は，必ずある補助量子系 D に対して $\kappa = (n,\mu)$ と添え字の書き換えができて，特定の $\hat{\omega}_D$ と $\{|n\rangle_D\}$ 及び $\hat{U}_{SD}$ が存在し，(2.16) 式を満たすことが一般に証明される [17]．特に κ の添え字の自由度には μ の自由度を全く含ませないことも常にできる．つまり $\hat{\omega}_D$ が純粋状態 $|0\rangle\langle 0|$ になるような測定設定を見つけることも常に可能であることが知られている．このため以降では測定演算子に対応する間接測定モデルの D の始状態を常に純粋状態として扱う．

(2.18) 式を満たす $\hat{M}_{\kappa S}$ に対して $\hat{U}_{SD}$ を次のように構築しよう．$\{|u_n\rangle_S : n = 1,2,\cdots,N_S\}$ を S のヒルベルト空間の正規直交基底とし，$\{|\kappa\rangle_D : \kappa = 1,2,\cdots, N_\kappa\}$ を D のヒルベルト空間のある正規直交基底とする．すると $\{|(n,\kappa)\rangle_{SD} = |u_n\rangle_S|\kappa\rangle_D\}$ は合成系の正規直交基底となる．ここで $\hat{M}_{\kappa S}$ を用いて

$$U_{(n,\kappa)(n',1)} = \langle u_n|\hat{M}_{\kappa S}|u_{n'}\rangle$$

という複素数量を定義すると (2.18) 式から

$$\sum_{(n,\kappa)} U^*_{(n,\kappa)(n',1)}U_{(n,\kappa)(n'',1)} = \delta_{n'n''}\delta_{11} = \delta_{(n',1)(n'',1)}$$

という関係が保証される．従って

$$\vec{u}_{(n,1)} = \left(U_{(1,1)(n,1)},\cdots,U_{(N_S,1)(n,1)},\cdots,U_{(1,N_\kappa)(n,1)},\cdots,U_{(N_S,N_\kappa)(n,1)}\right)^T$$

という N_S 本の $N_S N_\kappa$ 次元複素ベクトルを定義すると，これらは互いに直交する単位ベクトルであることが分かる．この N_S 本のベクトル全てと直交する

$N_S(N_\kappa-1)$ 本の正規直交ベクトルを用意することが必ずできる．従ってこれらを合わせて

$$\sum_{(n,\kappa)} U^*_{(n,\kappa)(n',\kappa')}U_{(n,\kappa)(n'',\kappa'')} = \delta_{n'n''}\delta_{\kappa'\kappa''} = \delta_{(n',\kappa')(n'',\kappa'')}$$

を満たす $N_S N_\kappa$ 本の正規直交ベクトル

$$\vec{u}_{(n,\kappa)} = \left(U_{(1,1)(n,\kappa)},\cdots,U_{(N_S,1)(n,\kappa)},\cdots,U_{(1,N_\kappa)(n,\kappa)},\cdots,U_{(N_S,N_\kappa)(n,\kappa)}\right)^T$$

が存在することが分かる．従って

$$\langle(n,\kappa)|_{SD}\hat{U}_{SD}|(n',\kappa')\rangle_{SD} = U_{(n,\kappa)(n',\kappa')}$$

という成分を持つユニタリー演算子 $\hat{U}_{SD}$ を定義することができる．$\hat{U}_{SD}$ は定義から

$$\langle u_n|\hat{M}_{\kappa S}|u_{n'}\rangle = \langle(n,\kappa)|_{SD}\hat{U}_{SD}|(n',1)\rangle_{SD} = \langle u_n|_S\langle\kappa|_D\hat{U}_{SD}|u_{n'}\rangle_S|1\rangle_D$$

を満たしている．$\{|u_n\rangle_S\}$ は S のヒルベルト空間の完全系を成すため，これは

$$\hat{M}_{\kappa S} = \langle\kappa|_D\hat{U}_{SD}|1\rangle_D$$

を意味する．従って $\hat{\omega}_D = |1\rangle_D\langle1|_D$ とした時の間接測定モデルに対する測定演算子として $\hat{M}_{\kappa S}$ を解釈することが常にできることが証明された．従って一般的な量子測定の集合は，(2.18) 式を満たす $\hat{M}_{\kappa S}$ の集合と等価である．この測定演算子の概念を用いると，個々の物理的設定を具体的に考える必要はなくなる．このため量子測定の強力な一般論が展開可能になっている．

最後に一般測定の具体例を述べよう．有限次元系における一番簡単で非自明な一般測定は以下の 2 値測定である．まず $0 \le p \le 1$ を満たす定数 p と $\left\|\hat{L}^\dagger\hat{L}\right\| \neq 0$ となる任意の演算子 $\hat{L}$ を用いて

$$\hat{M}_0 = \sqrt{\frac{p}{\left\|\hat{L}^\dagger\hat{L}\right\|}}\hat{L}$$

という演算子を定義する．ここで $\|\ \|$ は行列ノルムで，エルミート行列に対しては固有値の絶対値の最大値に等しい．$\hat{M}_0^\dagger\hat{M}_0$ の固有値は非負かつ 1 以下であるため，

$$\hat{M}_1 = \sqrt{\hat{I} - \hat{M}_0^\dagger\hat{M}_0}$$

というエルミート演算子 $\hat{M}_1$ が定義できて，かつ

$$\hat{M}_0^\dagger\hat{M}_0 + \hat{M}_1^\dagger\hat{M}_1 = \hat{I}$$

を満たす．従って $\left\{\hat{M}_0,\hat{M}_1\right\}$ は一般測定の測定演算子になっている．

第 3 章
量子操作

3.1 一般的量子操作としての TPCP 写像

この節では一般的な量子操作の数学的側面を紹介する．量子系の状態を異なる状態に変化させる物理的過程は量子物理学でも量子情報理論でも重要である．理論的に一番簡易で良く知られている過程はユニタリー過程であろう．考えている量子系 A が状態 $\hat{\rho}_A$ にあるとしよう．A のヒルベルト空間に作用するあるユニタリー演算子 $\hat{U}_A$ によって状態変化を起こさせる過程は

$$\hat{\rho}'_A = \hat{U}_A \hat{\rho}_A \hat{U}_A^\dagger$$

と書ける．このユニタリー過程では純粋状態から混合状態には変化することはできない．ところが量子補助系 R を用意すると，ユニタリー過程を使ってもっと多様な状態変化を実現することができる．A の始状態を $\hat{\rho}_A$ とし，R の始状態を $\hat{\rho}_A$ に依存しない $\hat{\omega}_R$ という状態としよう．そして A と R の合成系 AR の大きなヒルベルト空間に作用するユニタリー演算子 $\hat{U}_{AR}$ を考えよう．この操作の後で R の存在は忘れて A だけに注目した縮約状態 $\hat{\rho}'_A$ は

$$\hat{\rho}'_A = \operatorname*{Tr}_R \left[\hat{U}_{AR} \left(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\omega}_R \right) \hat{U}_{AR}^\dagger \right] \tag{3.1}$$

と計算される．すると $\hat{\rho}_A$ が純粋状態であったとしても $\hat{\rho}'_A$ は混合状態になり得る．実はこれはもっとも一般的な物理過程を記述している．

量子情報理論では A が空間的に離れた 2 つの量子系 A_1 と A_2 の合成系 A_1A_2 とする場合を扱うことも多い．A_1 と A_2 が光ファイバー等の量子通信路 (quantum channel) で結ばれていて，その中を光子等の量子的な情報キャリアが移動できる環境を考え，その途中で任意の物理的操作が行われるという問題設定である．量子暗号の通信における盗聴者の攻撃もこの設定で記述できるため，その重要度は高い．A_1 の始状態を $\hat{\rho}_{A_1}^{(in)}$ とし，A_2 の始状態を $\hat{\rho}_{A_1}^{(in)}$ に依存しない $\hat{\xi}_{A_2}$ という状態とする．合成系 A_1A_2 の始状態は $\hat{\rho}_{A_1A_2} = \hat{\rho}_{A_1}^{(in)} \otimes \hat{\xi}_{A_2}$ となる．

(3.1) 式の状態変化の後で $\hat{\rho}'_{A_1A_2}$ の A_1 に関して部分トレースをとれば,

$$\hat{\rho}^{(out)}_{A_2} = \underset{A_1R}{\mathrm{Tr}}\left[\hat{U}_{A_1A_2R}\left(\hat{\rho}_{A_1A_2}\otimes\hat{\omega}_R\right)\hat{U}^{\dagger}_{A_1A_2R}\right]$$

という A_2 に関する縮約状態を得る．通信路の理論では $\hat{\rho}^{(in)}_{A_1}$ を入力状態と呼び，$\hat{\rho}^{(out)}_{A_2}$ を出力状態と呼ぶ．また A_1 と A_2 のヒルベルト空間の次元は異なっても良い．従って (3.1) 式の状態変化は一般的な量子的通信路の通過で生じる状態変化も含んでいる．このような背景から量子物理学における状態変化理論と量子情報科学における通信路理論の間には密接な関係がある．

ヒルベルト空間の次元が N_A である量子系 A の 1 つの状態 $\hat{\rho}$ から，ヒルベルト空間の次元が $N_{A'}$ である A' という量子系の $\Gamma[\hat{\rho}]$ という状態が何らかの物理的過程によって生成されるとしよう．もちろん A と A' が同じ量子系でも良い．物理的に実現できる最も一般的な状態変化を記述する写像 Γ は数学的にどのような特徴づけが可能であろうか．これは以下のように達成される [18]．まず A の任意の量子状態 $\hat{\rho}$ は必ず A' の量子状態に写像されなければ物理的に意味がない．つまり

$$\hat{\rho}\geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\right]=1$$

を満たす任意のエルミート演算子 $\hat{\rho}$ に対して，$\Gamma[\hat{\rho}]$ はエルミート演算子となり

$$\Gamma\left[\hat{\rho}\right]\geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\left[\Gamma\left[\hat{\rho}\right]\right]=1$$

が満たされる必要がある．$\hat{\rho}\geq 0$ を満たす $\hat{\rho}$ に対して $\Gamma[\hat{\rho}]\geq 0$ という性質を持つ Γ は数学的に正値写像 (positive map) と呼ばれる．次に Γ には以下で述べるアフィン性が物理的に要求される．$\hat{\rho}_1$ と $\hat{\rho}_2$ という A の 2 つの量子状態に対して，$0\leq p\leq 1$ を満たす実数パラメータ p を用いて

$$\hat{\rho}=p\hat{\rho}_1+(1-p)\hat{\rho}_2 \tag{3.2}$$

と書ける状態 $\hat{\rho}$ を考える時

$$\Gamma\left[\hat{\rho}\right]=p\Gamma\left[\hat{\rho}_1\right]+(1-p)\Gamma\left[\hat{\rho}_2\right] \tag{3.3}$$

が成り立つ場合に Γ にはアフィン性があるという．これを課す理由は次のように理解できる．確率 p で表が出て，確率 $1-p$ で裏が出るコインを用意して，表が出た時には $\hat{\rho}_1$ を用意し，裏が出た時には $\hat{\rho}_2$ を用意する．それらに対して Γ で記述される状態変化を起こそう．そして任意に選択した物理量 $\hat{O}$ を測定する．この操作を繰り返してその物理量の平均値を求めることにしよう．表が出たデータの集合に対しての $\hat{O}$ の平均値は $\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma\left[\hat{\rho}_1\right]\right]$ であり，裏の場合には $\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma\left[\hat{\rho}_2\right]\right]$ である．従ってデータ全体での平均値は $p\,\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma\left[\hat{\rho}_1\right]\right]+(1-p)\,\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma\left[\hat{\rho}_2\right]\right]$ と求められる．一方 $\hat{O}$ の測定前に全ての状態を混ぜてしまって平均化したものは (3.2) 式の状態 $\hat{\rho}$ になる．これを Γ で変化させると $\Gamma[\hat{\rho}]$ という状態になる．

そしてこの $\Gamma[\hat{\rho}]$ に対して $\hat{O}$ を測っても，その平均値 $\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma[\hat{\rho}]\right]$ は先に求めた値に一致するはずである．

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma[\hat{\rho}]\right] = p\,\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma[\hat{\rho}_1]\right] + (1-p)\,\mathrm{Tr}\left[\hat{O}\Gamma[\hat{\rho}_2]\right].$$

任意の $\hat{O}$ に対してこれが成り立つために (3.3) 式の関係を得る．実は (3.3) 式を満たす Γ は A のヒルベルト空間から A' のヒルベルト空間への線形写像にもなることが知られている．(詳しい証明は文献 [16] を参照.) 従って物理的な Γ は状態に関しての線形写像であることが要求される．従って $\mathrm{Tr}[\hat{\rho}]=1$ である $\hat{\rho}$ に対して Γ が $\mathrm{Tr}[\Gamma[\hat{\rho}]]=1$ を満たす場合には，任意の演算子 $\hat{\lambda}$ に対しても $\mathrm{Tr}\left[\Gamma\left[\hat{\lambda}\right]\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\lambda}\right]$ を満たすことが分かる．この性質を持つ Γ はトレース保存写像 (trace preserving map) と呼ばれる．Γ に対する 3 つ目の条件として，少し非自明な条件が必要である．考えている A, A' の他に任意の外部量子系 B を考えよう．A と B の合成系 AB の任意の状態 $\hat{\Omega}_{AB}$ を用意する．そして部分系 A に対して Γ に対応する物理的操作を行おう．B に対しては何もしない．つまり B には任意の状態 $\hat{\rho}_B$ に対して

$$id_B[\hat{\rho}_B] = \hat{\rho}_B$$

となる恒等写像 id_B を作用させたことになる．これを数学的に表現すると合成写像 $\Gamma_A \otimes id_B$ を A と B の合成系に作用させたことになっている．もし Γ が確かに物理的操作に対応しているならば，結果として得られる状態 $(\Gamma_A \otimes id_B)\left[\hat{\Omega}_{AB}\right]$ は A' と B の合成系のなんらかの量子状態になっているべきである．つまり $\hat{\Omega}_{AB} \geq 0$ を満たす任意のエルミート演算子 $\hat{\Omega}_{AB}$ に対して $(\Gamma_A \otimes id_B)\left[\hat{\Omega}_{AB}\right]$ もエルミート演算子になり，

$$(\Gamma_A \otimes id_B)\left[\hat{\Omega}_{AB}\right] \geq 0$$

が満たされる．この性質は完全正値性と呼ばれる．これは先に述べた正値性より強い条件である．これまでに Γ に課された条件は以下の 3 つに整理される．

(I) 線形性： $\Gamma\left[\sum_n c_n\hat{\lambda}_n\right] = \sum_n c_n\Gamma\left[\hat{\lambda}_n\right]$

(II) トレース保存性： $\mathrm{Tr}\left[\Gamma\left[\hat{\lambda}\right]\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\lambda}\right]$

(III) 完全正値性： $\hat{\Omega}_{AB} \geq 0 \Rightarrow (\Gamma_A \otimes id_B)\left[\hat{\Omega}_{AB}\right] \geq 0$

これらの 3 つの条件を満たす Γ はトレース保存完全正値写像 (trace-preserving completely-positive map) と呼ばれる．また英語の 4 つの頭文字をとって**TPCP 写像**とも呼ばれる．実は任意の TPCP 写像はなんらかの物理的操作を表していることが証明できる [19]．まず (I), (II), (III) の条件を Γ が満たせば，A のヒルベルト空間から A' のヒルベルト空間に写像する演算子の組

$\left\{\hat{K}_\alpha\right\}$ があって

$$\Gamma\left[\hat{\rho}\right] = \sum_\alpha \hat{K}_\alpha \hat{\rho} \hat{K}_\alpha^\dagger \tag{3.4}$$

を満たすことが以下のように示せる[20].

(3.4) 式を示すために，ヒルベルト空間の次元が A と同じ N_A になるような量子系 B を選ぶ．$\{|n\rangle_A : n = 1 \sim N_A\}$ を A の完全正規直交系，$\{|a_m\rangle_{A'} : m = 1 \sim N_{A'}\}$ を A' の完全正規直交系，$\{|b_n\rangle_B : n = 1 \sim N_A\}$ を B の完全正規直交系としよう．そして

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N_A}} \sum_n |n\rangle_A |b_n\rangle_B$$

という状態を定義する．この状態に $\Gamma_A \otimes id_B$ を作用させると

$$(\Gamma_A \otimes id_B)\left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right] \geq 0$$

となることが (III) の条件から保証される．この状態のスペクトル分解を

$$(\Gamma_A \otimes id_B)\left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right] = \sum_\alpha p_\alpha |\Phi_\alpha\rangle_{A'B}\langle\Phi_\alpha|_{A'B}, \tag{3.5}$$

$$p_\alpha \geq 0, \qquad \sum_\alpha p_\alpha = 1$$

としよう．更に $|\Phi_\alpha\rangle_{A'B}$ の B の部分を完全系 $\{|b_n\rangle_B\}$ で以下のように展開しよう．

$$|\Phi_\alpha\rangle_{A'B} = \sum_n |f_{\alpha n}\rangle_{A'} |b_n\rangle_B.$$

(I) の線形性の条件と (3.5) 式から

$$\frac{1}{N_A}\sum_{nn'} \Gamma_A\left[|n\rangle_A\langle n'|_A\right] \otimes |b_n\rangle_B\langle b_{n'}|_B = \sum_{nn'}\sum_\alpha p_\alpha |f_{\alpha n}\rangle_{A'}\langle f_{\alpha n'}|_{A'} \otimes |b_n\rangle_B\langle b_{n'}|_B$$

が導かれる．$\{|b_n\rangle_B\}$ の完全性を用いると

$$\Gamma\left[|n\rangle_A\langle n'|_A\right] = \sum_\alpha N_A p_\alpha |f_{\alpha n}\rangle_{A'}\langle f_{\alpha n'}|_{A'} \tag{3.6}$$

という関係が分かる．ここで

$$\langle a_m|_{A'} \hat{K}_\alpha |n\rangle_A = \sqrt{N_A p_\alpha}\langle a_m|f_{\alpha n}\rangle_{A'}$$

という行列成分を持つ演算子 $\hat{K}_\alpha$ を定義しよう．これは

$$\hat{K}_\alpha |n\rangle_A = \sqrt{N_A p_\alpha}|f_{\alpha n}\rangle_{A'}$$

を意味する．従って (3.6) 式は

$$\Gamma\left[|n\rangle_A\langle n'|_A\right] = \sum_\alpha \hat{K}_\alpha|n\rangle_A\langle n'|_A\hat{K}_\alpha^\dagger$$

と書きかえられる．(I) の Γ の線形性を使うと任意の状態 $\hat{\rho}_A = \sum_{nn'}\langle n|\hat{\rho}_A|n'\rangle$ $(|n\rangle_A\langle n'|_A)$ に対して

$$\Gamma\left[\hat{\rho}_A\right] = \sum_\alpha \hat{K}_\alpha\hat{\rho}_A\hat{K}_\alpha^\dagger$$

となることが分かる．これを TPCP 写像のクラウス表現 (Kraus representation) と呼ぶ．なおクラウス表示は定まった Γ に対して一意的ではないことに注意が必要である．(II) の条件を用いると A のヒルベルト空間に作用する任意の演算子 $\hat{\lambda}_A$ に対して

$$\mathrm{Tr}\left[\sum_\alpha \hat{K}_\alpha\hat{\lambda}_A\hat{K}_\alpha^\dagger\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\lambda}_A\right]$$

が成り立つ．トレースの性質から

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_\alpha \hat{K}_\alpha^\dagger\hat{K}_\alpha\right)\hat{\lambda}_A\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\lambda}_A\right]$$

とも書けるが，任意の $\hat{\lambda}_A$ に対してこれが成り立つために

$$\sum_\alpha \hat{K}_\alpha^\dagger\hat{K}_\alpha = \hat{I}_A \tag{3.7}$$

が要求される．(3.7) 式の規格化条件を満たす $\hat{K}_\alpha$ のことをクラウス演算子 (Kraus operator) と呼ぶ．第 2 章の測定演算子と同様の議論により，ヒルベルト空間の次元が $N_AN_{A'}$ である補助量子系 R があって，このヒルベルト空間のある正規直交基底 $\{|r_\alpha\rangle_R : \alpha = 1 \sim N_AN_{A'}\}$ と AR 系のヒルベルト空間に作用するユニタリー演算子 $\hat{U}_{AR}$ とを用いて

$$\hat{K}_\alpha = \langle r_\alpha|_R\hat{U}_{AR}|r_1\rangle_R$$

と書ける．従って (3.1) 式の $\hat{\omega}_R$ を

$$\hat{\omega}_R = |r_1\rangle_R\langle r_1|_R$$

という純粋状態に定めることにより，Γ を

$$\Gamma\left[\hat{\rho}_A\right] = \mathop{\mathrm{Tr}}_R\left[\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_A\otimes|r_1\rangle_R\langle r_1|_R\right)\hat{U}_{AR}^\dagger\right] \tag{3.8}$$

と表すことができる．つまり任意の TPCP 写像 Γ は注目系と外部系の合成系でのユニタリー変換 $\hat{U}_{AR}$ によって生成されることが証明された．(3.8) 式は Γ が確かにある物理的過程を記述していることを意味している．従って任意の物理的操作は TPCP 写像 Γ と等価であり，それはクラウス表現をすることができる．

一般に量子系 S において任意に選んだある始状態 $\hat{\rho}_{in}$ を任意に選んだある終状態 $\hat{\rho}_{out}$ に変化させる TPCP 写像 Γ が常に存在する．

$$\hat{\rho}_{out} = \Gamma\left[\hat{\rho}_{in}\right]. \tag{3.9}$$

この条件を満たす写像の例の 1 つは $\Gamma_{tr}\left[\hat{\rho}\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\right]\hat{\rho}_{in}$ であるが，上記の性質を満たす Γ は一意ではない．同じヒルベルト空間の次元を持つ補助系 S' を用意してその初期状態を $\hat{\rho}_{out}$ にする．そして

$$\hat{U}_{SS'}^{(SWAP)}|n\rangle_S|n'\rangle_{S'} = |n'\rangle_S|n\rangle_{S'}$$

という性質を満たす合成系のユニタリー演算子 $\hat{U}_{SS'}^{(SWAP)}$ を用いれば，

$$\Gamma_{SWAP}\left[\hat{\rho}\right] = \mathop{\mathrm{Tr}}_{S'}\left[\hat{U}_{SS'}^{(SWAP)}\left(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_{out\ S'}\right)\hat{U}_{SS'}^{(SWAP)\dagger}\right]$$

で定義される TPCP 写像に対しても (3.9) 式の関係が成り立つ．このような Γ は第 4 章の量子縺れの議論でも用いる．

次に物理として有用な TPCP 写像の例を与えておこう．まず部分トレースをとる操作は TPCP 写像である．A を A' と R の 2 つの量子系の合成系としよう．始状態を $\hat{\rho}_A = \hat{\rho}'_{A'R}$ とした時に，R の部分トレースをとる操作を考える．

$$\Gamma_{PT}\left[\hat{\rho}_A\right] = \mathop{\mathrm{Tr}}_{R}\left[\hat{\rho}'_{A'R}\right].$$

この写像 Γ_{PT} は自明に (I), (II), (III) の条件を満たし，TPCP 写像であることが証明できる．部分トレースは物理的にはそれ以降 R に関する操作や物理量の測定を全く行わないという意味に過ぎない．例えば任意の A' の物理量 $\hat{O}_{A'}$ に関して自明に

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{A'R}\left[\hat{O}_{A'}\hat{\rho}_{A'R}\right] = \mathop{\mathrm{Tr}}_{A'}\left[\hat{O}_{A'}\mathop{\mathrm{Tr}}_{R}\left[\hat{\rho}_{A'R}\right]\right]$$

という関係があるため，$\hat{O}_{A'}$ の測定に関しては縮約状態 $\Gamma_{PT}\left[\hat{\rho}_A\right]$ だけを扱えば十分である．最初に触れた A のヒルベルト空間に作用するユニタリー演算子 $\hat{U}_A$ によって

$$\Gamma_U\left[\hat{\rho}_A\right] = \hat{U}_A\hat{\rho}_A\hat{U}_A^\dagger$$

と定義される Γ_U も重要な TPCP 写像の例である．このユニタリー操作も外部系との相互作用によって実現されるが，操作後にも量子コヒーレンスを注目系だけで保つには工夫が必要となる．例えば量子ビット A に $\exp\left(-i\theta\hat{\sigma}_{3A}\right)$ というユニタリー操作を行いたい場合，外部の制御系としてマクロなコヒーレント状態にある調和振動子系 R を設定すれば実現できる．無次元化された振動子の位置座標演算子 $\hat{q}_R$ を用いて，時間 T の間だけ A と R に

$$\hat{H} = g\hat{\sigma}_{3A}\hat{q}_R$$

という相互作用があるとしよう．相互作用が切れた後には

$$\hat{U}_{AR} = \exp\left(-igT\hat{\sigma}_{3A}\hat{q}_R\right)$$

というユニタリー操作が合成系 AR に施されたことになる．ここで A の始状態を $|\psi\rangle$，R の始状態を振幅が c である

$$|c\rangle_R = e^{-\frac{|c|^2}{2}} \exp\left(c\hat{a}_R^\dagger\right)|0\rangle_R$$

というコヒーレント状態とする．$\hat{a}_R^\dagger$ は $\left[\hat{a}_R, \hat{a}_R^\dagger\right] = 1$ を満たす生成演算子であり，$\hat{q}_R$ とは

$$\hat{q}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger\right)$$

で結ばれている．また状態 $|0\rangle_R$ は $\hat{a}_R|0\rangle_R = 0$ で定義されている．この操作の後の A の縮約状態は

$$\hat{\rho}_A = \operatorname*{Tr}_R\left[\hat{U}_{AR}\left(|\psi\rangle_A\langle\psi|_A \otimes |c\rangle_R\langle c|_R\right)\hat{U}_{AR}^\dagger\right]$$

で計算される．$\hat{\sigma}_{3A}|\pm\rangle_A = \pm|\pm\rangle_A$ を満たす $\{|+\rangle_A, |-\rangle_A\}$ という基底を用いて $\psi_\pm = \langle\pm|\psi\rangle$ を定義すると，$\hat{\rho}_A$ は具体的に

$$\begin{bmatrix} \langle+|\hat{\rho}_A|+\rangle & \langle+|\hat{\rho}_A|-\rangle \\ \langle-|\hat{\rho}_A|+\rangle & \langle-|\hat{\rho}_A|-\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\psi_+|^2 & \psi_+\psi_-^* e^{-2igT\tilde{q}}e^{-2g^2} \\ \psi_-\psi_+^* e^{2igT\tilde{q}}e^{-2g^2} & |\psi_-|^2 \end{bmatrix}$$

と計算される．ここで $\tilde{q}$ はコヒーレント状態の位置座標の古典的振幅であり，

$$\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c + c^*\right)$$

で与えられる．そして g と c を調整して $\theta = gT\tilde{q}$ が一定になる条件のもとで振幅 c を大きく（マクロ化）しながら結合定数 g を 0 に近づけると

$$\hat{\rho}_A = \exp\left(-i\theta\hat{\sigma}_{3A}\right)|\psi\rangle\langle\psi|\exp\left(i\theta\hat{\sigma}_{3A}\right) = \begin{bmatrix} |\psi_+|^2 & \psi_+\psi_-^* e^{-2i\theta} \\ \psi_-\psi_+^* e^{2i\theta} & |\psi_-|^2 \end{bmatrix}$$

が実現することが分かる．状態 $\hat{\rho}_A$ がどのくらい純粋状態に近いかを表す純粋度 (purity) も

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_A^2\right] = 1 - 2|\psi_+|^2|\psi_-|^2\left[1 - \exp\left(-4g^2\right)\right] \to 1$$

と評価され，$g \to 0$ の極限で A の状態が純粋状態となることも確認できる．

第 2 章で扱った量子測定もある種の物理的過程であるため，TPCP 写像が有用である．まず注目系 S と測定機系 D，更にその測定結果を認識する測定者までいれた非常に大きなマクロ合成系を上記の量子系 A とみなす場合には，その状態の変化はユニタリーな TPCP 写像で原理的に記述可能である．また SD 系に限定した平均的状態変化も TPCP 写像を用いて記述可能である．つまり

測定演算子を $\hat{M}_{nS}$ とすると，始状態 $\hat{\rho}_S \otimes |0\rangle_D\langle 0|_D$ から

$$\Gamma_{SD}\left[\hat{\rho}_S \otimes |0\rangle_D\langle 0|_D\right] = \sum_n \hat{M}_{nS}\hat{\rho}_S\hat{M}_{nS}^\dagger \otimes |n\rangle_D\langle n|_D$$

という状態を生み出す TPCP 写像 Γ_{SD} が存在する．ここで $|n\rangle_D$ は D の測定結果を表すメーターの観測量 $\hat{O}_D = \sum_n n|n\rangle_D\langle n|_D$ の固有状態であり，測定結果 n を記憶しているメモリの自由度に対応している．S と D を相互作用をさせてもその測定結果を測定者が読まなかった場合には D に関する部分トレースがとられる．部分トレースも TPCP 写像であるため

$$\Gamma_S\left[\hat{\rho}_S\right] = \sum_n \hat{M}_n\hat{\rho}_S\hat{M}_n^\dagger$$

を満たす S だけの状態変化を記述する TPCP 写像 Γ_S も存在することが分かる．この場合 $\hat{M}_n$ は Γ_S のクラウス演算子とみなせる．

3.2 LOCC：局所的操作と古典通信

時空の中にある複数の量子系を考えよう．各量子系は空間的に局在しており，互いに離れている．この時因果的に結ばれない時空領域にある 2 つの量子系に関しては，両者間の非局所的相互作用はアクティブではない．例えば $\hat{\sigma}_3$ のアップ状態 $|+\rangle$ にある 2 個の電子スピン A と B が同一時刻に離れた地点に置かれているとする．A と B が因果的に結ばれない時空領域の中にある限り，この $|+\rangle_A|+\rangle_B$ という合成系の状態を

$$\hat{U}_{AB}|+\rangle_A|+\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A|-\rangle_B - |-\rangle_A|+\rangle_B\right)$$

のように一重項状態 (singlet state) に変換させる非局所的なユニタリーな操作 $\hat{U}_{AB}$ は不可能であることが分かる．可能なのは，離れたそれぞれの地点における局所的な量子操作 $\hat{U}_A$ と $\hat{U}'_B$ のみである．この $\hat{U}_{AB}$ のような A と B の合成系のヒルベルト空間に作用する一般的な操作は，A と B を同じ空間領域で接触させて近接相互作用をさせれば実装できる．ところが因果的に結ばれた時空領域内でも A と B が空間的に十分に距離をとって置かれていれば，例えクーロン力のような長距離相互作用もその強さは極めて小さくなり，短時間内の情報処理に使用する $\hat{U}_{AB}$ の実装は事実上不可能と言ってよい．これを踏まえて量子情報理論においては以下のような 1 つの理想化された設定をしばしば考え，その範疇での量子状態の操作理論を構築する．量子系に対して使用できる操作は空間の小さな体積領域内での局所的操作 (local operation) だけと限定し，空間的に離れた 2 地点間では古典的ビット列に還元できる情報のやり取りだけを電話等の通信路で行う古典通信 (classical communication) だけが許されるというものである．局所的操作にはユニタリー操作以外に，測定を含む局

所的 TPCP 写像で表される一般操作も含まれる．局所的操作と古典通信が行えるため，local operation and classical communication という英語の頭文字をとってこの設定はしばしば **LOCC** と略して呼ばれる．拡張されたものとして，通信される情報が古典ビット列に限定されず，偏極光子を光ファイバーで送信する等により量子ビット列のやりとりも許す local operation and quantum communication (LOQC) と名づけられる設定もある．この場合には A の量子状態そのものを B の空間領域の量子補助系 A' に転送することができる．そして B の地点で任意の合成系のユニタリー操作 $\hat{U}_{A'B}$ を A' と B の間で行った後に再び A' の量子状態を量子通信で A に転送をすることにより，A と B の合成系の任意のユニタリー操作 $\hat{U}_{AB}$ は実現できる．しかし光ファイバー等で量子コヒーレンスを保ちながら情報媒体を長距離移動させることは技術的に難しい．代わりに十分に時間をかけて多くの量子的に縺れた量子系を遠隔地と共有してから，後述の量子テレポーテーションの技術を用いて一気に LOQC の量子情報処理をする方法等が考えられている．

最も簡単で非自明な LOCC の例を挙げよう．量子状態 $\hat{\rho}_{AB}$ にある A と B の合成系 AB を考える．そしてアリスが A を所有し，離れたところにいるボブが B を所有しているとする．そしてアリスが測定演算子 $\hat{M}_{\mu A}$ で与えられる局所的測定を A に施して測定結果 μ を得る．古典通信により μ をボブに伝え，ボブは μ に依存した局所的ユニタリー演算子 $\hat{U}_{\mu B}$ を B に作用させる．非相対論的取り扱いをして通信にかかる時間を無視する場合には，この一連の操作で構成される LOCC での状態変化は

$$\Gamma_{LOCC}\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = \sum_{\mu} \hat{U}_{\mu B} \hat{M}_{\mu A} \hat{\rho}_{AB} \hat{M}_{\mu A}^{\dagger} \hat{U}_{\mu B}^{\dagger} \tag{3.10}$$

という TPCP 写像で表現される．ここで A と B の局所性は $\left[\hat{M}_{\mu A}, \hat{U}_{\mu B}\right] = \left[\hat{M}_{\mu A}^{\dagger}, \hat{U}_{\mu B}\right] = 0$ という形で表現される．古典通信の効果は $\hat{U}_{\mu B}\hat{M}_{\mu A}$ のように同じ測定値 μ に対応する演算子の積だけを和に含められるところに反映されている．

3.3 連鎖する測定過程としての LOCC

アリスとボブの間の LOCC は一般性を失うことなく，以下の操作の繰り返しで書ける．アリスがある一般測定を A に施し，その結果 μ_1 をボブに伝えて，μ_1 に依存した一般的量子操作とそれに続く一般測定を B に施す．得た測定結果 μ_2 をアリスに伝えて，μ_1, μ_2 に依存した一般的量子操作とそれに続く一般測定を A に施す．一般的量子操作や一般測定には恒等写像が含まれるため，この操作を繰り返すことで任意の LOCC は構成できる．この途中の各過程に出てくる一般的量子操作はそれに続く一般測定とまとめて数学的に扱うことが常に

できる．例えばLOCCの途中でそれまでの測定結果μに依存した状態$\hat{\rho}_{AB}(\mu)$にあるAに対して，μ依存の一般的量子操作

$$\Gamma_{\mu A}\left[\hat{\rho}_{AB}(\mu)\right]=\sum_{\alpha}\hat{K}_{\alpha A}(\mu)\hat{\rho}_{AB}(\mu)\hat{K}_{\alpha A}(\mu)^{\dagger}$$

を行う．その後で縮退度nを伴ったμ依存の測定演算子$\hat{M}(\mu)_{\nu n\ A}$に対応する一般測定をAにした時，新しい測定結果νに対応する測定後状態は

$$\hat{\rho}(\nu)_{AB}\propto\sum_{n}\hat{M}(\mu)_{\nu n\ A}\Gamma_{\mu A}\left[\hat{\rho}_{AB}(\mu)\right]\hat{M}(\mu)_{\nu n\ A}^{\dagger}$$

となる．これは

$$\hat{\rho}(\nu)_{AB}\propto\sum_{n\alpha}\left(\hat{M}(\mu)_{\nu n\ A}\hat{K}_{\alpha A}(\mu)\right)\hat{\rho}_{AB}(\mu)\left(\hat{M}(\mu)_{\nu n\ A}\hat{K}_{\alpha A}(\mu)\right)^{\dagger}$$

と書けるため，測定演算子が

$$\hat{M}'(\mu)_{\nu n\alpha\ A}=\hat{M}(\mu)_{\nu n\ A}\hat{K}_{\alpha A}(\mu)$$

である一般測定を1回行ったとみなすことが可能である．また一連のLOCC操作の最後の測定結果に依存した一般的量子操作も常に測定値を読み出さない特定の測定の一種とみなせるため，LOCCにおいて一般的量子操作による操作を独立して扱う必要がない．つまりLOCCを単純にAとBとの間での局所的一般測定とその結果の古典通信の繰り返しの操作として数学的に記述できる．

各一般測定の測定機系の始状態が純粋状態であって注目系の純粋始状態を純粋終状態に変化させる場合にはより強い主張もできる[21]．測定をアリスとボブで交互に何回も行う場合でも，その操作後状態はアリスが特定の測定を1回だけAに行い，その結果をボブに伝えてBに特定のユニタリー操作を行って得られる状態に一致する．

3.4 LOCCのユニタリー化

他のTPCP写像と同様にLOCCも大きな合成系のユニタリー過程で記述できる．この見方はしばしば有用である．例として(3.10)式で表されるLOCC過程をユニタリー発展で記述してみよう．任意の測定演算子$\hat{M}_{\mu A}$は測定機系Dの始状態$|0\rangle_D$とμ本の互いに直交する量子状態$|\mu\rangle_D$及びAとDの間の測定相互作用を記述するユニタリー演算子$\hat{U}_{AD}^{(M)}$を用いて$\hat{M}_{\mu A}=\langle\mu|_D\hat{U}_{AD}^{(M)}|0\rangle_D$と書ける．これを(3.10)式に代入すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{LOCC}\left[\hat{\rho}_{AB}\right]&=\sum_{\mu}\hat{U}_{\mu B}\langle\mu|_D\hat{U}_{AD}^{(M)}|0\rangle_D\hat{\rho}_{AB}\langle 0|_D\hat{U}_{AD}^{(M)\dagger}|\mu\rangle_D\hat{U}_{\mu B}^{\dagger}\\&=\operatorname*{Tr}_{D}\left[\sum_{\mu}|\mu\rangle_D\langle\mu|_D\hat{U}_{\mu B}\hat{U}_{AD}^{(M)}\left(\hat{\rho}_{AB}\otimes|0\rangle_D\langle 0|_D\right)\hat{U}_{AD}^{(M)\dagger}\hat{U}_{\mu B}^{\dagger}\right]\end{aligned}\tag{3.11}$$

と変形される．ここで

$$\hat{U}^{(CU)}_{BD} = \sum_{\mu} \hat{U}_{\mu B} |\mu\rangle_D \langle\mu|_D$$

という制御ユニタリー演算子 (controlled unitary operator) と呼ばれる形のユニタリー演算子を定義しよう．この演算は D に含まれる μ の情報を乱さずに読み出し，その結果に依存した $\hat{U}_{\mu B}$ という演算子を B に作用させるものである．これを使うと (3.11) 式は

$$\Gamma_{LOCC}\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = \operatorname*{Tr}_{D}\left[\hat{U}^{(CU)}_{BD}\hat{U}^{(M)}_{AD}\left(\hat{\rho}_{AB}\otimes|0\rangle_D\langle 0|_D\right)\hat{U}^{(M)\dagger}_{AD}\hat{U}^{(CU)\dagger}_{BD}\right]$$

と等しい．従って Γ_{LOCC} に対応する合成系 ABD のユニタリー演算子は

$$\hat{U}^{(LOCC)}_{ABD} = \hat{U}^{(CU)}_{BD}\hat{U}^{(M)}_{AD} \tag{3.12}$$

で与えられることが分かる．なおこの LOCC は必ず始状態が注目系と外部補助系の状態の直積で書ける前提で行われる．第 4 章 4.1 節でみる LOCC のもとでの量子縺れの単調減少性は時間反転に対して対称ではないが，これは始状態の直積性という境界条件が時間反転対称性を破るために現れる．このため時間反転をした $\left(\hat{U}^{(LOCC)}_{ABD}\right)^{-1}$ というユニタリー時間発展演算子は常に存在するが，これは一般に LOCC 過程を記述しないことに注意が必要である．

次に量子ビットの最適近似複製法と関連のある LOCC を考えよう [12]．量子ビット A の純粋状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ をブロッホ表示で

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + \sum_{s=1}^{3} x_s \hat{\sigma}_s\right) \tag{3.13}$$

と表そう．ここで純粋性条件は

$$\sum_{s=1}^{3} x_s^2 = 1$$

で与えられている．この状態を測定するために $s = 1, 2, 3,\ b = +, -$ に対して

$$\hat{M}_{sbA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\hat{I}_A + b\hat{\sigma}_{sA}\right) \tag{3.14}$$

で定義される 6 値の測定演算子を定義する．これらが規格化条件

$$\sum_{s=1}^{3}\sum_{b=-}^{+} \hat{M}^{\dagger}_{sb}\hat{M}_{sb} = \hat{I}_A$$

を満たすことも簡単に確認できる．この一般測定を (3.13) 式の状態 $|\psi\rangle_A\langle\psi|_A$ にある A に対して行おう．各々(s,b) の結果が出る確率は

$$p_{sb} = \langle\psi|_A \hat{M}^{\dagger}_{sbA}\hat{M}_{sbA}|\psi\rangle_A = \frac{1}{6}(1 + b x_s) \tag{3.15}$$

と計算される．(s,b) という結果を測定で得た場合に測定前の A の状態を

$$|\psi_{sb}\rangle\langle\psi_{sb}| = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + b\hat{\sigma}_s\right) \tag{3.16}$$

という純粋状態であると推定してみよう．この (s,b) のデータに基づけば同じ推定状態 $|\psi_{sb}\rangle\langle\psi_{sb}|$ を何個でも生成することもできる．簡単のために 2 個の量子ビット B_1 と B_2 からなる合成系 B_1B_2 を考え，始状態がそれぞれ $|0\rangle\langle 0|$ で与えられていたとしよう．そして $|0\rangle\langle 0|$ を $|\psi_{sb}\rangle\langle\psi_{sb}|$ にする TPCP 写像 $\Gamma^{(sb)}$ を考える．(これは (3.9) 式の結果から常に可能である．) 特に今の場合では (s,b) に依存したユニタリー演算子 $\hat{U}^{(sb)}$ で定義されるユニタリーな TPCP 写像で達成できる．

$$\Gamma^{(sb)}\left[|0\rangle\langle 0|\right] = \hat{U}^{(sb)}|0\rangle\langle 0|\hat{U}^{(sb)\dagger} = |\psi_{sb}\rangle\langle\psi_{sb}|.$$

この $\Gamma^{(sb)}$ を B_1B_2 に作用させると $|\psi\rangle$ の 2 個の近似複製 $|\psi_{sb}\rangle_{B_1}|\psi_{sb}\rangle_{B_2}$ ができる．ただ原本 $|\psi\rangle$ に対する $|\psi_{sb}\rangle_B$ という近似複製の忠実度は

$$F_{sb} = |\langle\psi|\psi_{sb}\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + bx_s\right)$$

と計算され，x_s つまり $|\psi\rangle$ に依存してしまう．状態を平均すると $|\psi\rangle$ 依存性は消えるため，LOCC をユニタリー化すれば普遍的量子クローニングが達成できる．まず (3.14) 式の一般測定をユニタリー化しよう．A に対して (3.14) 式の一般測定を行う始状態 $|g\rangle$ の測定機系 D を考える．互いに直交する D の 6 個のポインター状態を $|sb\rangle$ と書く．そして (3.14) 式の測定演算子と

$$\hat{M}_{sbA} = \langle sb|_D \hat{U}^{(M)}_{AD}|g\rangle_D$$

という関係にある AD 系のユニタリー演算子 $\hat{U}^{(M)}_{AD}$ を導入する．B_1, B_2 各々に $\hat{U}^{(sb)}$ を作用させる B_1B_2D の制御ユニタリー演算子

$$\hat{U}^{(CU)}_{B_1B_2D} = \sum_{sb}\hat{U}^{(sb)}_{B_1}\hat{U}^{(sb)}_{B_2}|sb\rangle_D\langle sb|_D$$

を定義する．これを用いると，この LOCC 全体のユニタリー化は合成系 AB_1B_2D での

$$\hat{U}_{AB_1B_2D} = \hat{U}^{(CU)}_{B_1B_2D}\hat{U}^{(M)}_{AD}$$

というユニタリー演算子でなされる．操作後の状態は

$$|\Phi\rangle_{AB_1B_2D} = \hat{U}_{AB_1B_2D}|\psi\rangle_A|0\rangle_{B_1}|0\rangle_{B_2}|g\rangle_D$$

という純粋状態となる．これから例えば B_1 の縮約状態は

$$\hat{\rho}'_{B_1} = \operatorname*{Tr}_{AB_2D}\left[|\Phi\rangle_{AB_1B_2D}\langle\Phi|_{AB_1B_2D}\right]$$

から得られる．計算すると (3.15) 式の p_{sb} を用いて

$$\hat{\rho}'_{B_1} = \sum_{sb} \operatorname*{Tr}_{AB_2} \left[\left(\hat{M}_{sb} |\psi\rangle_A \langle\psi|_A \hat{M}^\dagger_{sb} \right) \left(|\psi_{sb}\rangle_{B_1} \langle\psi_{sb}|_{B_1} \right) \left(|\psi_{sb}\rangle_{B_2} \langle\psi_{sb}|_{B_2} \right) \right]$$
$$= \sum_{sb} p_{sb} |\psi_{sb}\rangle_{B_1} \langle\psi_{sb}|_{B_1}$$

となる．ユニタリー化によって $\hat{\rho}'_{B_1}$ に平均操作が自動的に現れたために，$\hat{\rho}'_{B_1}$ の $|\psi\rangle$ に対する忠実度 F は $|\psi\rangle$ に依存しなくなり，

$$F = \sum_{sb} p_{sb} F_{sb} = \frac{2}{3}$$

と計算される．この値は無限個の近似複製を作る場合の (1.13) 式の忠実度の上限値に一致している．

3.5 TPCP 写像と量子状態の間の双対性

TPCP 写像は量子系の物理的操作や量子通信における状態変化を表すが，物理学ではしばしばこの状態変化を測定することによって TPCP 写像自体を推定することが行われる．例えば素粒子の未知の相互作用を調べるためには，既知の始状態にある素粒子同士を衝突させて，その結果発生する素粒子の終状態を測定して情報を収集する．つまり TPCP 写像の同定は最終的に終状態のトモグラフィによって行われる．これに関してここではチョイ–ヤミオウコフスキー同型写像 (Choi–Jamiołkowski isomorphism)[22],[23] を紹介する．これは任意の TPCP 写像と量子状態の間の双対性 (duality) である．

注目系 S と同じヒルベルト空間の次元 N を持っている補助系 R を考えよう．S と R のヒルベルト空間は同型であるので同じ正規直交基底 $\{|n\rangle\}$ を考えることができる．これを用いて

$$|I\rangle_{SR} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} |n\rangle_S |n\rangle_R \tag{3.17}$$

という純粋状態を定義する．この状態の S に対して任意の TPCP 写像 Γ を，R には恒等写像 id を作用させよう．そして得られる終状態を $\hat{\gamma}_{SR}$ と書こう．

$$\hat{\gamma}_{SR} = (\Gamma_S \otimes id_R) \left[|I\rangle_{SR} \langle I|_{SR} \right]. \tag{3.18}$$

Γ がトレース保存性を持つために

$$\operatorname*{Tr}_S \left[\Gamma \left[|n\rangle_S \langle n'|_S \right] \right] = \operatorname*{Tr}_S \left[|n\rangle_S \langle n'|_S \right] = \delta_{nn'}$$

が成り立っている．これと $\{|n\rangle_R\}$ の完全性の条件

$$\sum_{n=1}^{N} |n\rangle_R \langle n|_R = \hat{I}_R$$

を用いると $\hat{\gamma}_{SR}$ は以下の性質を持っていることが示される．

$$\operatorname*{Tr}_S[\hat{\gamma}_{SR}] = \frac{1}{N}\hat{I}_R. \tag{3.19}$$

これはもともと始状態 $|I\rangle_{SR}$ に関して

$$\operatorname*{Tr}_S[|I\rangle_{SR}\langle I|_{SR}] = \frac{1}{N}\hat{I}_R$$

という性質が成り立っており，$\Gamma_S \otimes id_R$ という写像は S にだけ物理的操作していることから R の縮約状態には影響がない事実から導かれる自然な結果である．$\hat{\gamma}_{SR}$ は実は TPCP 写像 Γ の全ての情報を担っていることが分かる．実際 $\hat{\gamma}_{SR}$ を知っていれば以下の方法で Γ は再構築される．状態 $\hat{\rho}$ に対してある正規直交基底 $\{|n\rangle\}$ に対する転置演算を以下のように定義する．

$$\hat{\rho}^T = \sum_{nn'} |n\rangle\langle n'|\hat{\rho}|n\rangle\langle n'|.$$

すると $\hat{\gamma}_{SR}$ から Γ は

$$\Gamma[\hat{\rho}]_S = N \operatorname*{Tr}_R\left[(\hat{I}_S \otimes \left(\hat{\rho}^T\right)_R)\hat{\gamma}_{SR}\right] \tag{3.20}$$

という公式で決定される．この公式は

$$\Gamma[\hat{\rho}]_S = N \operatorname*{Tr}_R\left[(\hat{I}_S \otimes (\hat{\rho})_R)\hat{\gamma}_{SR}^{T_R}\right]$$

とも書ける．ここで T_R は部分系 R にだけ転置を行う操作であり，第 4 章でみるように量子縺れと深い関わりがある．証明は以下の通りである．(3.18) 式に (3.17) 式を代入すると

$$\hat{\gamma}_{SR} = \frac{1}{N}\sum_{nn'}\Gamma[|n\rangle_S\langle n'|_S]_S \otimes |n\rangle_R\langle n'|_R$$

を得るが，これを (3.20) 式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}
N \operatorname*{Tr}_R\left[(\hat{I}_S \otimes \left(\hat{\rho}^T\right)_R)\hat{\gamma}_{SR}\right] &= \sum_{nn'}\Gamma[|n\rangle_S\langle n'|_S]_S\langle n'|\hat{\rho}^T|n\rangle \\
&= \sum_{nn'}\Gamma[|n\rangle_S\langle n'|_S]_S\langle n|\hat{\rho}|n'\rangle \\
&= \Gamma\left[\left(\sum_n |n\rangle_S\langle n|_S\right)\hat{\rho}\left(\sum_{n'}|n'\rangle_S\langle n'|_S\right)\right]_S \\
&= \Gamma[\hat{\rho}]_S
\end{aligned}$$

となり，(3.20) 式の左辺を得て証明は終わる．

(3.19) 式を満たす SR 系の任意の量子状態 $\hat{\gamma}_{SR}$ に対して (3.20) 式で定義される Γ は TPCP 写像になることも以下のように分かる．$\hat{\gamma}_{SR}$ のスペクトル分解

$$\hat{\gamma}_{SR} = \sum_\mu p_\mu |\Psi_\mu\rangle_{SR}\langle\Psi_\mu|_{SR}$$

を考えよう．SR 系の基底系 $\{|n\rangle_S|n'\rangle_R\}$ で $|\Psi_\mu\rangle_{SR}$ をベクトル表示して

$$\psi_{nn'}(\mu) = \langle n|_S \langle n'|_R |\Psi_\mu\rangle_{SR}$$

と書こう．このベクトルから

$$\left[\langle u_n|\hat{K}_{\mu S}|u_{n'}\rangle\right] = \sqrt{Np_\mu}\begin{bmatrix} \psi_{11}(\mu) & \psi_{12}(\mu) & \cdots & \psi_{1N}(\mu) \\ \psi_{21}(\mu) & \psi_{22}(\mu) & \cdots & \psi_{2N}(\mu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N1}(\mu) & \psi_{N2}(\mu) & \cdots & \psi_{NN}(\mu) \end{bmatrix}$$

で定義される S 系の演算子 $\hat{K}_{\mu S}$ を定義しよう．直接計算により

$$N \operatorname*{Tr}_R \left[(\hat{I}_S \otimes \left(\hat{\rho}^T\right)_R)\hat{\gamma}_{SR}\right] = \sum_\mu \hat{K}_{\mu S}\hat{\rho}_S \hat{K}^\dagger_{\mu S} \tag{3.21}$$

が確かめられる．(3.19) 式から

$$\sum_\mu \hat{K}^\dagger_{\mu S}\hat{K}_{\mu S} = \hat{I}_S$$

も確かめられるため

$$\Gamma[\hat{\rho}_S] = \sum_\mu \hat{K}_{\mu S}\hat{\rho}_S \hat{K}^\dagger_{\mu S}$$

というクラウス表現が得られる．従って Γ 自身が TPCP 写像であることが証明された．このことから (3.19) 式を満たす $\hat{\gamma}_{SR}$ と Γ の間には 1 対 1 対応が存在して，(3.18) 式と (3.20) 式で繋がっていることが分かる．

ここで興味深いのは，Γ を調べるのに様々な始状態を用意してその終状態を測定する必要はなく，ただ 1 つの $|I\rangle_{SR}$ を始状態として用意して Γ を作用させれば十分であるという点である．その終状態 $\hat{\gamma}_{SR}$ だけをトモグラフィで決定すれば Γ は確定するのである．$|I\rangle_{SR}$ という状態は N 個の $|n\rangle_S|n\rangle_R$ という状態を量子的に重ね合わせて作られている．このいろいろな始状態の実験を量子的な線形重ね合わせで 1 つの $|I\rangle_{SR}$ の実験にまとめるのがこの双対性の方法である．

なお一般に純粋状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ に対して転置操作した状態 $(|\psi\rangle\langle\psi|)^T$ はベクトル表示で

$$|\psi^*\rangle = \sum_n |n\rangle\langle\psi|n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle^*$$

となる．従って $(|\psi\rangle\langle\psi|)^T = |\psi^*\rangle\langle\psi^*|$ が成り立つ．この表記を用いると，一般のユニタリー演算子 $\hat{U}$ を純粋状態 $|in\rangle$ に作用させた後で $|out\rangle$ へ遷移する場合の振幅 $\langle out|\hat{U}|in\rangle$ に関する以下の公式が示される．

$$\langle out|\hat{U}|in\rangle = \sqrt{N}\,(\langle out|_S\langle in^*|_R)\,\hat{U}_S|I\rangle_{SR}. \tag{3.22}$$

この (3.22) 式は以下のように導かれる．

$$
\begin{aligned}
\sqrt{N}\langle out|_S\langle in^*|_R\hat{U}_S|I\rangle_{SR} &= \sum_n \langle out|_S\langle in^*|_R\hat{U}_S|n\rangle_S|n\rangle_R \\
&= \sum_n \langle out|\hat{U}|n\rangle\langle in^*|n\rangle \\
&= \langle out|\hat{U}\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)|in\rangle \\
&= \langle out|\hat{U}|in\rangle.
\end{aligned}
$$

つまり $|I\rangle_{SR}$ という状態に $\hat{U}_S\hat{I}_R$（S には $\hat{U}_S$ を作用させ，R には何もしない操作）を施すと，S が $|out\rangle$ に，R は $|in\rangle$ の複素共役状態 $|in^*\rangle$ になる遷移振幅が S での遷移振幅 $\langle out|\hat{U}|in\rangle$ に定数倍を除いて一致している．つまり遷移確率 $\left|\langle out|\hat{U}|in\rangle\right|^2$ を実験的に知るには，$|I\rangle_{SR}$ を始状態として用意して $\hat{U}_S\hat{I}_R$ を作用させた後に測定して $|out\rangle_S|in^*\rangle_R$ という状態になっているデータだけを事後選択 (post-selection) してその確率を求め，それに N をかけることでも可能であることを意味する．$\hat{U}$ を S の時間発展演算子とすると，この関係は大変興味深い事実を意味することになる．つまり過去の時刻に S の始状態として $|in\rangle$ を用意する代わりに，未来の時刻に R で $|in^*\rangle$ という終状態を用意しても良いということである．$|I\rangle_{SR}$ を使えば始状態を未来に設定できることを意味する．図 3.1 でこれらの流れをまとめた．時間は右から左の向きに流れている．図中の (a) は過去に $|in\rangle$ を用意し，未来に $|out\rangle$ を用意する通常の場合を表している．(b) は過去に $|I\rangle_{SR}$ を用意して，未来に $|out\rangle_S|in^*\rangle_R$ の事後選択をする場合に対応する．また (3.22) 式と同様の証明方法で

$$
\langle out|\hat{U}|in\rangle = \sqrt{N}\langle I|_{SR}\hat{U}_S\left(|in\rangle_S|out^*\rangle_R\right) \tag{3.23}
$$

という関係も示される．(3.23) 式は (3.22) 式とは逆に過去の時刻に終状態を設定できることを意味している．つまり $|out^*\rangle_R$ を事前選択 (pre-selection) しておけば，終状態を $|I\rangle_{SR}$ にすることにより $\langle out|\hat{U}|in\rangle$ を求められる．この場合

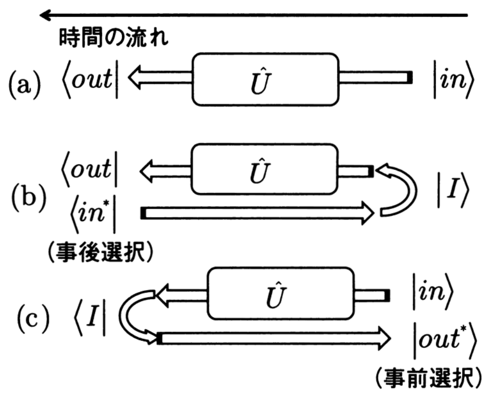


図 3.1　時間の向きを反転させられる量子縺れ状態の概念図.

は図 3.1 の (c) に対応している．$|I\rangle_{SR}$ は後で述べる最大量子縺れ状態であり，このような量子状態を使うと過去と未来の境界条件も入れ替えることができるという面白い性質が量子力学にはある．

第 4 章
量子エンタングルメント

4.1　量子エンタングルメントの操作論的定義

ここでは**量子縺れ**，即ち量子エンタングルメント (quantum entanglement) の概念を量子操作論的に導入していく．例として 2 つの量子ビット A と B を考えよう．A はアリスが保管し，B はアリスと離れたボブが保管する．そして 2 つとも $\hat{\sigma}_3$ のアップ状態にある合成系状態 $\hat{\rho}_{0AB} = |+\rangle_A\langle+|_A \otimes |+\rangle_B\langle+|_B$ を状態変化のスタートにしよう．A と B のそれぞれに TPCP 写像で書かれる局所的な量子操作を行えば，

$$\hat{\Omega}_{AB} = \hat{\rho}_A \hat{\rho}'_B$$

という直積の形の任意の状態が生成可能であることは第 3 章の (3.9) 式から分かる．しかしこの場合まだ A と B のいかなる物理量の間にも相関は存在しない．実際 A と B の局所的演算子 $\hat{O}_A, \hat{O}'_B$ に対しての相関関数

$$C_{\hat{\Omega}_{AB}}\left(\hat{O}_A, \hat{O}'_B\right) = \operatorname*{Tr}_{AB}\left[\hat{O}_A \hat{O}'_B \hat{\Omega}_{AB}\right] - \operatorname*{Tr}_{AB}\left[\hat{O}_A \hat{\Omega}_{AB}\right] \operatorname*{Tr}_{AB}\left[\hat{O}'_B \hat{\Omega}_{AB}\right]$$

は常に 0 となる．では $\hat{\rho}_{0AB}$ の状態にある A と B にアリスとボブが任意の LOCC 操作を施した時にどのような状態が生成されるだろうか．例として最初に $\mu = \pm$ という 2 値に対する確率分布 p_μ $(p_+ = p, p_- = 1-p, 0 \le p \le 1)$ に対して

$$\hat{O}_A = |O_+\rangle_A\langle O_+|_A - |O_-\rangle_A\langle O_-|_A, \tag{4.1}$$

$$|O_+\rangle_A = \sqrt{p_+}|+\rangle_A - \sqrt{p_-}|-\rangle_A, \tag{4.2}$$

$$|O_-\rangle_A = \sqrt{p_-}|+\rangle_A + \sqrt{p_+}|-\rangle_A \tag{4.3}$$

で定義される A の物理量 $\hat{O}_A$ を測定しよう．$\hat{O}_A$ の固有値 ± 1 は確率 $p_\pm$ で観測され，A は測定結果に応じて (4.2) 式，(4.3) 式で定義された状態になる．合成系 AB の状態は測定結果 μ に応じて $(|O_\mu\rangle_A\langle O_\mu|_A)\,(|+\rangle_B\langle+|_B)$ になってい

る．次にアリスは A の測定結果 μ を古典通信によってボブに伝えて情報を共有する．情報に基づいてアリスとボブは μ に依存した任意の局所的 TPCP 写像 $\Gamma_A(\mu)\otimes\Gamma'_B(\mu)$ を AB に作用できる．操作後は

$$\hat{\rho}(\mu)_A = \Gamma_A(\mu)\left[|O_\mu\rangle_A\langle O_\mu|_A\right], \qquad \hat{\rho}'(\mu)_B = \Gamma'_B(\mu)\left[|+\rangle_B\langle +|_B\right]$$

から得られる $\hat{\rho}(\mu)_A\hat{\rho}'(\mu)_B$ という任意の直積状態になる．この一連の LOCC 操作後の平均化状態は 1 つの TPCP 写像 $\Gamma_{AB}^{(LOCC)}$ を用いて

$$\Gamma_{AB}^{(LOCC)}\left[\hat{\rho}_{0AB}\right] = \sum_\mu p_\mu \hat{\rho}(\mu)_A \otimes \hat{\rho}'(\mu)_B \tag{4.4}$$

と書くことができる．この例では A の測定を理想測定にして説明したが，LOCC では任意の一般測定も許される．多値の一般測定を考えれば測定値 μ の数ももっと大きな任意の自然数をとれる．従って (4.4) 式の μ は任意の数の要素に渡って和をとることができ，同時に $\hat{\rho}(\mu)_A$, $\hat{\rho}'(\mu)_B$ も任意の A と B の量子状態をとることが可能となる．この $\Gamma_{AB}^{(LOCC)}$ の操作の後で，今度は B を測定してその結果に依存させた局所的量子操作を A と B 両方に施す新たな LOCC 操作を続けても (4.4) 式の μ の数が増えていくだけで，(4.4) 式の形に状態が書けることは変わらない．A と B が量子ビットの場合に限らずに一般の量子系の場合でも，

$$\hat{\rho}_{AB}^{(SS)} = \sum_\mu p_\mu \hat{\rho}(\mu)_A \otimes \hat{\rho}'(\mu)_B \tag{4.5}$$

という形の任意の状態が LOCC で生成できる．この状態は分離可能状態 (separable state) と呼ばれる．$\hat{\rho}_{AB}^{(SS)}$ は一般に A と B の間の相関を持つが，それは空間的に離れた A と B の間を古典通信で繋いだ場合に生成される相関であるため，通信理論の立場からは純粋に古典的相関とみなされる．そして直積状態に対する LOCC だけでは生成できない量子相関を一般に**量子縺れ**，もしくは**量子エンタングルメント** (quantum entanglement)，または量子を略して単にエンタングルメントと呼ぶ．つまり A と B の合成系において量子的に縺れた量子状態とは，どんなに工夫しても (4.5) 式の形に絶対書けない状態を指す．つまり分離可能ではない状態 (non-separable state) が量子縺れ状態 (entangled state) の定義である．なお分離可能な純粋状態は $|\psi\rangle_A|\phi\rangle_B$ という純粋状態の直積状態しか存在しない．従って量子的に縺れた純粋状態は $|\psi\rangle_A|\phi\rangle_B$ の形に書けない純粋状態を指す．従って合成系の純粋状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ が分離可能であるか量子的に縺れているかの判断は $|\Psi\rangle_{AB}$ のシュミット分解によって容易にできる．任意の $|\Psi\rangle_{AB}$ に対して A, B のある完全正規直交系 $\{|u_n\rangle_A\}, \{|v_n\rangle_B\}$ 及び確率分布 p_n が存在して

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_n \sqrt{p_n}|u_n\rangle_A|v_n\rangle_B$$

と書ける．この時にどの p_n も 1 と異なっていれば $|\Psi\rangle_{AB}$ は積状態にかけずに，量子的に縺れていることが分かる．ここで紹介した量子縺れの定義は 2 体系を超えて多体系にも自然に拡張できる．N 個の量子系 $A^{(n)}$ $(n=1\sim N)$ の合成系の状態がある古典的確率分布 p_μ に対して

$$\hat{\rho}^{(SS)}_{A^{(1)}\ldots A^{(N)}}=\sum_\mu p_\mu\left(\prod_{n=1}^{N}\otimes\hat{\rho}^{(n)}(\mu)_{A^{(n)}}\right) \tag{4.6}$$

という形に書ける時，同様に分離可能状態と呼ぶ．どのようにしても (4.6) 式の形に書けない状態が N 体系での量子縺れ状態である．

4.2 量子エンタングルメント解析における局所性の定義の重要性

量子縺れの定義は部分量子系の局所性の定義に大きく依存している．局所性の定義は通常の空間的意味を超えて抽象化したものを採用しても構わない．但し局所性の定義をきちんと理解しておかないと，量子縺れの概念そのものに混乱を及ぼすことがあるので注意が必要である．例えば光子の偏極の 2 つの自由度を考えよう．ある波長の円偏光の右巻きの光子を作る生成消滅演算子を $\hat{a}_R^\dagger, \hat{a}_R$ と表記し，左巻きに対しては $\hat{a}_L^\dagger, \hat{a}_L$ としよう．真空状態は

$$\hat{a}_R|0\rangle=\hat{a}_L|0\rangle=0$$

によって定義される．また右巻き光子が n 個，左巻き光子が m 個ある状態は

$$|n_R m_L\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}a_R^{\dagger n}\frac{1}{\sqrt{m!}}a_L^{\dagger m}|0\rangle$$

で与えられる．ここで

$$\left[\hat{a}_R,\hat{a}_L^\dagger\right]=\left[\hat{a}_R^\dagger,\hat{a}_L\right]=\left[\hat{a}_R,\hat{a}_L\right]=\left[\hat{a}_R^\dagger,\hat{a}_L^\dagger\right]=0$$

を満たすことから R と L の演算子は互いに可換であり，これによって R と L の局所性を定義することもできる．つまり $\hat{a}_R^\dagger$ と $\hat{a}_R$ だけから構成できる TPCP 写像によって R の局所的量子操作を定義し，$\hat{a}_L^\dagger, \hat{a}_L$ だけから構成できる TPCP 写像によって L の局所的量子操作を定義することが可能である．2 つの偏極には空間的に離れているという概念はないが，演算子の局所性関係から量子縺れを RL 間に対して自然に導入することができる．典型的な量子縺れ状態は 2 個の光子に対するシュレーディンガーの猫状態である．

$$|cat\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2_R 0_L\rangle+|0_R 2_L\rangle\right).$$

この状態は

$$|cat\rangle=\frac{1}{2}\left(a_R^{\dagger 2}+a_L^{\dagger 2}\right)|0\rangle$$

とも書けるが，決して

$$|cat\rangle = f(\hat{a}_R, \hat{a}_R^\dagger) g(\hat{a}_L, \hat{a}_L^\dagger)|0\rangle$$

という積状態の形に書けないため量子縺れ状態である．しかし局所性を R と L の演算子の可換性で定義せずに従来の空間的領域での意味で定義すれば，$|cat\rangle$ は量子的に縺れた状態ではない．また $\hat{a}_R^\dagger$ と $\hat{a}_L^\dagger$ を混ぜた

$$\hat{a}_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_R^\dagger \pm i \hat{a}_L^\dagger \right) \tag{4.7}$$

という演算子は

$$\left[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger \right] = 1$$

を満たし，$\hat{a}_\pm^\dagger|0\rangle$ はある 1 光子の 2 つの独立な偏光状態を記述している．また

$$\left[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\mp^\dagger \right] = 0, \qquad \left[\hat{a}_\pm^\dagger, \hat{a}_\mp^\dagger \right] = 0$$

が成り立つため，偏極自由度の局所性を L, R ではなく $+, -$ の偏極で定義することもできる．この場合

$$\hat{a}_R^{\dagger 2} + \hat{a}_L^{\dagger 2} = \left(\hat{a}_R^\dagger - i \hat{a}_L^\dagger \right) \left(\hat{a}_R^\dagger + i \hat{a}_L^\dagger \right)$$

という関係が成り立つため，$|cat\rangle$ は

$$|cat\rangle = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger |0\rangle$$

という形に書ける．これは演算子が積の形になっているため，この局所性の定義では $|cat\rangle$ は量子縺れ状態ではなくなる．このように量子縺れの定義は量子系の局所性の定義自体に深く依存していることに留意する必要がある．量子光学では偏極以外でも異なる運動量の複数の光子モードをそれぞれ局所的な部分量子系とみなして量子縺れを論じることもある．

また同種粒子の場合，量子縺れの有無の判断は工夫が必要となる．例えば 1 つ 1 つの粒子が異なる状態にある同種粒子の多体系では，粒子の統計性のために量子縺れが自動的に存在するようにも見える．2 個の同一フェルミオン粒子が離れた空間領域 A, B に局在する波動関数 $\psi_A(x)$, $\phi_B(x)$ で記述される状態にある場合を考えてみよう．2 体系全体の波動関数は統計性を満たすように

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_A(x_1)\phi_B(x_2) - \phi_B(x_1)\psi_A(x_2) \right) \tag{4.8}$$

と書かれる．もし 2 つの粒子が異種粒子であれば，確かにこれは典型的な量子縺れ状態である．しかし同種粒子の場合，任意の測定機 D とこの 2 粒子間の相互作用は必ず

$$\hat{H}_m = \sum_k \left(\hat{O}_{k1} + \hat{O}_{k2} \right) \otimes \hat{O}'_{kD}$$

という $1 \leftrightarrow 2$ 入れ替えに関して対称な形になる．量子力学では同種粒子の 1 つ 1 つを区別する測定や操作が原理的に存在しないために，そのままでは局所性は定義できず，(4.8) 式の $\Psi(x_1, x_2)$ の状態にある 2 粒子の量子縺れも判断できない．同種粒子系の量子縺れの導入には部分系の局所性の定義をする際に工夫が必要であり，いくつかの定式化がなされている[24]~[27]．

4.3 エンタングルメントエントロピー

前節で量子縺れ状態の定義は操作論的にできたが，それがどのくらい縺れているかという定量化をすることは物理にも情報科学にも役立つ．ここでは 2 体系純粋状態での量子縺れの測度の一つであるエンタングルメントエントロピー (entanglement entropy) を紹介する．なおこれを以下では**量子縺れエントロピー**と呼ぶ．A と B の量子系の合成系 AB の純粋状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ を考えよう．簡単のために A と B のヒルベルト空間の次元は同じ N とする．ここで $0 \leq x \leq 1$ という領域に対して定義される関数

$$f(x) = -x \ln x$$

を導入しておく．量子縺れエントロピー $S(|\Psi\rangle_{AB})$ の定義は

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = \operatorname*{Tr}_A \left[f\left(\operatorname*{Tr}_B \left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB} \right] \right) \right]$$

で与えられる．A に対する縮約状態

$$\hat{\rho}_A = \operatorname*{Tr}_B \left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB} \right]$$

を定義すると，フォンノイマンエントロピーを用いて

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = -\operatorname*{Tr}_A \left[\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A \right]$$

とも書ける．$|\Psi\rangle_{AB}$ のシュミット分解を

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_n \sqrt{p_n} |u_n\rangle_A |v_n\rangle_B$$

とすると，その分解に現れる確率分布 p_n を使ったシャノンエントロピー

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = -\sum_n p_n \ln p_n$$

でも計算できる．またこの公式には p_n しか現れないため A と B の入れ替えに対して $S(|\Psi\rangle_{AB})$ は対称である．従って

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = \operatorname*{Tr}_B \left[f\left(\operatorname*{Tr}_A \left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB} \right] \right) \right]$$

という関係も成り立つ．$S(|\Psi\rangle_{AB})$ の基礎的な性質を以下で順次述べていこう．

(S1) 局所的ユニタリー $\hat{U}_A\hat{U}'_B$ を $|\Psi\rangle_{AB}$ に作用させた時，不変である．

$$S\left(\hat{U}_A\hat{U}'_B|\Psi\rangle_{AB}\right) = S(|\Psi\rangle_{AB}). \tag{4.9}$$

(S2) $|\psi\rangle_A|\phi\rangle_B$ に対して

$$S(|\psi\rangle_A|\phi\rangle_B) = 0 \tag{4.10}$$

が成り立つ．

(4.9) 式は $f\left(\hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger\right) = \hat{U}f\left(\hat{O}\right)\hat{U}^\dagger$ 及びトレースの性質 ($\mathrm{Tr}\left[\hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{O}\right]$) とユニタリー性 ($\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$) を使うと証明できる．また純粋直積状態には量子縺れが存在しないため，(4.10) 式は成り立つべき性質であり，証明は直接代入することでできる．

(S3) $|\Psi\rangle_{AB}$ の状態にある AB 系において A（または B）の一般測定において確率 p_μ で測定結果 μ が観測されて測定後状態が $|\Psi(\mu)\rangle_{AB}$ になった時，

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq \sum_\mu p_\mu S(|\Psi(\mu)\rangle_{AB}) \tag{4.11}$$

が成り立つ．

この (4.11) 式は量子縺れの基本的性質を表現している．量子縺れは LOCC によって生成可能な古典相関を超えた相関を A と B の間にもたらす．LOCC の一つである局所的測定において量子縺れは減少しても決して増加しないということを (4.11) 式は意味しており，単調性 (monotonicity) とも呼ばれる．証明は以下の通りである．測定後状態が純粋状態になる A の一般測定を考えよう．この測定に対する測定演算子を $\hat{M}_{\mu A}$ とする．測定結果 μ が観測される確率は $p_\mu = \langle\Psi|_{AB}\hat{M}^\dagger_{\mu A}\hat{M}_{\mu A}|\Psi\rangle_{AB}$ で与えられる．また μ の結果に対する測定後状態は

$$|\Psi(\mu)\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{p_\mu}}\hat{M}_{\mu A}|\Psi\rangle_{AB}$$

で計算される．ここで測定後の平均状態

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_\mu p_\mu|\Psi(\mu)\rangle_{AB}\langle\Psi(\mu)|_{AB}$$

を考えよう．各測定結果 μ に対しての B の測定後縮退状態

$$\hat{\rho}(\mu)_B = \mathrm{Tr}_A\left[|\Psi(\mu)\rangle_{AB}\langle\Psi(\mu)|_{AB}\right]$$

を用いると

$$\mathrm{Tr}_A\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = \sum_\mu p_\mu\hat{\rho}(\mu)_B$$

が成り立つ．一方

$$\begin{aligned}\operatorname*{Tr}_A[\hat{\rho}_{AB}] &= \operatorname*{Tr}_A\left[\sum_\mu \hat{M}_{\mu A}|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\hat{M}^\dagger_{\mu A}\right] \\ &= \operatorname*{Tr}_A\left[\left(\sum_\mu \hat{M}^\dagger_{\mu A}\hat{M}_{\mu A}\right)|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right] \\ &= \operatorname*{Tr}_A[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}]\end{aligned}$$

も成り立つことから

$$\operatorname*{Tr}_A[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}] = \sum_\mu p_\mu \hat{\rho}(\mu)_B$$

が示される．付録 C で証明されているフォンノイマンエントロピー $\mathrm{Tr}\,[f(\hat{\rho})]$ の凹性 (concavity)

$$\mathrm{Tr}\left[f\left(\sum_n p_n\hat{\rho}(n)\right)\right] \geq \sum_n p_n \,\mathrm{Tr}\,[f(\hat{\rho}(n))]$$

を用いると

$$\begin{aligned}S(|\Psi\rangle_{AB}) &= \operatorname*{Tr}_B\left[f\left(\sum_\mu p_\mu\hat{\rho}(\mu)_B\right)\right] \\ &\geq \sum_\mu p_\mu \operatorname*{Tr}_B[f(\hat{\rho}(\mu)_B)] = \sum_\mu p_\mu S(|\Psi(\mu)\rangle_{AB})\end{aligned}$$

が成り立ち，(S3) の証明が終わる．なお B の測定の場合でも証明は同じである．

LOCC は一般性を失うことなく A と B の一般測定とその測定結果の古典通信の繰り返しで記述されることを第 3 章の 3.3 節で述べた．この節では各測定後状態が必ず純粋状態になる場合に制限した LOCC を考えよう．この時 (S3) の性質から以下の性質も導かれる．

(S4) LOCC を $|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}$ に作用させて純粋状態 $|\Phi\rangle_{AB}\langle\Phi|_{AB}$ になった時，

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq S(|\Phi\rangle_{AB}) \tag{4.12}$$

が成り立つ．

証明は以下の通りである．1 回目の A の測定によって状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ が確率 $p^{(1)}_{\mu_1}$ で状態 $|\Psi_1(\mu_1)\rangle_{AB}$ に変化するとしよう．この時に

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq \sum_{\mu_1} p^{(1)}_{\mu_1} S(|\Psi_1(\mu_1)\rangle_{AB}) \tag{4.13}$$

が (S3) から成り立つ．次に $|\Psi_1(\mu)\rangle_{AB}$ の状態にある B に対して μ_1 に依存する測定を行い，確率 $p(\mu_1)^{(2)}_{\mu_2}$ で状態 $|\Psi_2(\mu_1\mu_2)\rangle_{AB}$ に変化するとしよう．この場合も同様に

$$S(|\Psi_1(\mu_1)\rangle_{AB}) \geq \sum_{\mu_2} p(\mu_1)^{(2)}_{\mu_2} S(|\Psi_2(\mu_1\mu_2)\rangle_{AB}) \tag{4.14}$$

が成り立つ．(4.13) 式と (4.14) 式から

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq \sum_{\mu_1\mu_2} p^{(1)}_{\mu_1} p(\mu_1)^{(2)}_{\mu_2} S(|\Psi_2(\mu_1\mu_2)\rangle_{AB}) \tag{4.15}$$

が得られる．始状態が $|\Psi\rangle_{AB}$ にあった A と B を交互に測定した時の N 回目の測定後に $|\Phi\rangle_{AB}$ が実現したとしよう．(4.15) 式と同様に

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq \sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} p^{(1)}_{\mu_1} p(\mu_1)^{(2)}_{\mu_2} \cdots p(\mu_1\cdots\mu_{N-1})^{(N)}_{\mu_N} S(|\Psi_N(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)\rangle_{AB})$$

という関係が成り立つが，仮定により全ての測定結果に対応する測定後状態 $|\Psi_N(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)\rangle$ は同じ $|\Phi\rangle_{AB}$ になっている．そして確率分布の規格化条件

$$\sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} p^{(1)}_{\mu_1} p(\mu_1)^{(2)}_{\mu_2} \cdots p(\mu_1\cdots\mu_{N-1})^{(N)}_{\mu_N} = 1$$

から

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq S(|\Phi\rangle_{AB}) \sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} p^{(1)}_{\mu_1} p(\mu_1)^{(2)}_{\mu_2} \cdots p(\mu_1\cdots\mu_{N-1})^{(N)}_{\mu_N} = S(|\Phi\rangle_{AB})$$

となり，(4.12) 式が証明される．

(S5) 合成系 $A_\kappa B_\kappa$ を複数用意した時，量子纏れエントロピーは相加性を満たす．

$$S\left(\prod_\kappa \otimes |\Psi^{(\kappa)}\rangle_{A_\kappa B_\kappa}\right) = \sum_\kappa S\left(|\Psi^{(\kappa)}\rangle_{A_\kappa B_\kappa}\right).$$

証明はフォンノイマンエントロピーの相加性から自明である．

2 量子ビット系で具体的に $S(|\Psi\rangle_{AB})$ をみてみよう．任意の状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ をシュミット分解して

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{p}|u_+\rangle_A|v_+\rangle_B + \sqrt{1-p}|u_-\rangle_A|v_-\rangle_B$$

で与えられているとしよう．ここで $0 \leq p \leq 1$ である．この状態に対して量子纏れエントロピーは

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p)$$

と計算される．最小値 0 は積状態 $|u_+\rangle_A|v_+\rangle_B$ または $|u_-\rangle_A|v_-\rangle_B$ で達成される．最大値は $p = 1/2$ で達成され，$S(|\Psi\rangle_{AB}) = \ln 2$ となる．例えば $\hat{\sigma}_3|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ とした時の，4 つのベル状態

$$|Bell_0\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A|+\rangle_B + |-\rangle_A|-\rangle_B\right), \tag{4.16}$$

$$|Bell_1\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle_A|+\rangle_B + |+\rangle_A|-\rangle_B\right), \tag{4.17}$$

$$|Bell_2\rangle_{AB} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle_A|+\rangle_B - |+\rangle_A|-\rangle_B\right), \tag{4.18}$$

$$|Bell_3\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A|+\rangle_B - |-\rangle_A|-\rangle_B\right) \tag{4.19}$$

のどれも最大量子縺れ状態である．任意の最大量子縺れ状態は $|Bell_0\rangle_{AB}$ に局所的ユニタリー演算子 $\hat{U}_A\hat{U}'_B$ をかけて生成できる．例えば $|Bell_\mu\rangle_{AB}$ $(\mu = 1,2,3)$ に対しては $\hat{\sigma}_{\mu A}$ や $\hat{\sigma}_{\mu B}$ で生成される．

$$|Bell_\mu\rangle_{AB} = \hat{\sigma}_{\mu A}|Bell_0\rangle_{AB} = \hat{\sigma}_{\mu B}|Bell_0\rangle_{AB}.$$

(S1)〜(S4) の性質を満たす純粋状態に対する量子縺れ測度は $S(|\Psi\rangle_{AB})$ 以外にもたくさん存在することが知られている[28]．A の量子状態 $\hat{\rho}_A$ を実数値に写像し，以下の 2 つの性質を満たす関数 F_{cc} を考えよう．

(F1) ユニタリー不変性：

$$F_{cc}\left[\hat{U}_A\hat{\rho}_A\hat{U}_A^\dagger\right] = F\left[\hat{\rho}_A\right].$$

(F2) $0 \le p \le 1$ を満たす p に対する凹性 (concavity)：

$$F_{cc}\left[p\hat{\rho}_{1A} + (1-p)\hat{\rho}_{2A}\right] \ge pF_{cc}\left[\hat{\rho}_{1A}\right] + (1-p)F_{cc}\left[\hat{\rho}_{2A}\right]. \tag{4.20}$$

(4.20) 式を満たす関数 F_{cc} は任意の確率分布 p_n と量子状態 $\hat{\rho}_n$ に対して

$$F_{cc}\left[\sum_n p_n\hat{\rho}_n\right] \ge \sum_n p_n F_{cc}\left[\hat{\rho}_n\right]$$

が成り立つ．この性質を満たす F_{cc} は行列凹関数 (matrix concave function) と呼ばれる．(F1) の性質から任意の純粋状態 $|\psi\rangle$ に対して $F_{cc}\left[|\psi\rangle\langle\psi|\right]$ は同じ値をとる．これを F_o と書こう．この時 F_{cc} を用いて

$$S_F\left(|\Psi\rangle_{AB}\right) = F_{cc}\left[\mathrm{Tr}_B\left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right]\right] - F_o \tag{4.21}$$

という量子縺れ測度を定義できる．$S_F\left(|\Psi\rangle_{AB}\right)$ はトレースの性質と (F1) の性質から局所的ユニタリー変換 $\hat{U}_A\hat{U}'_B$ に対して不変である．また F_o を引いているため $S_F\left(|\psi\rangle_A|\phi\rangle_B\right) = 0$ も満たされる．$F_{cc}[\hat{\rho}]$ の凹性を使うと，$S_F\left(|\Psi\rangle_{AB}\right)$ の (4.11) 式の証明と同様の方法で (S3) の性質

$$S_F(|\Psi\rangle_{AB}) \ge \sum_\mu p_\mu S_F(|\Psi(\mu)\rangle_{AB})$$

が示され，また (4.12) 式の証明と同様に (S4) の性質

$$S_F(|\Psi\rangle_{AB}) \geq S_F(|\Phi\rangle_{AB})$$

も成り立つ．$F[\hat{\rho}]$ を $-\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}]$ とすれば $S_F(|\Psi\rangle_{AB})$ は量子縺れエントロピーに一致するが，これ以外にも (F1), (F2) を満たす $F[\hat{\rho}]$ が存在している．例えば実数 $1 < z \leq 2$ に対して定義される

$$F_z[\hat{\rho}] = 1 - \mathrm{Tr}[\hat{\rho}^z] = 1 - \sum_n (p_n)^z$$

は (F1), (F2) を満たすことが知られている [29]．ここで p_n は $\hat{\rho}$ の固有値である．従って

$$S_{F_z}(|\Psi\rangle_{AB}) = 1 - \mathrm{Tr}_A\left[\left(\mathrm{Tr}_B[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}]\right)^z\right]$$

と定義すれば，これは純粋状態に対する量子縺れ測度を与える．また $0 < \alpha < 1$ に対して定義される量子レニィエントロピー (quantum Rényi entropy) [30]

$$F_\alpha[\hat{\rho}] = \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^\alpha]\right)$$

も (F1), (F2) を満たすため [29]，

$$S_\alpha(|\Psi\rangle_{AB}) = \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\mathrm{Tr}\left[\left(\mathrm{Tr}_B[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}]\right)^\alpha\right]\right)$$

も量子縺れ測度を与える．ここで $\alpha \to 1$ の極限を考えると $S_\alpha(|\Psi\rangle_{AB})$ は量子縺れエントロピーに一致する．

量子縺れエントロピーを含む (4.21) 式の量子縺れ測度 S_F は純粋状態に対しては有用であるが，残念ながら混合状態に関しては (4.11) 式及び (4.12) 式の LOCC 単調性を満たさないため，量子縺れ測度としては使えない．また量子縺れのない状態の時でも量子的に縺れている状態の時と同じ値をとってしまう場合がある．例えば S が零である 2 量子ビット系の純粋直積状態に局所的量子操作をすることで，

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{4}\hat{I}_{AB} = \left(\frac{1}{2}\hat{I}_A\right)\otimes\left(\frac{1}{2}\hat{I}_B\right)$$

という混合状態を作ることができる．これは分離可能状態であって量子的に縺れていないが，その縮約状態は

$$\mathrm{Tr}_B[\hat{\rho}_{AB}] = \frac{1}{2}\hat{I}_A, \qquad \mathrm{Tr}_A[\hat{\rho}_{AB}] = \frac{1}{2}\hat{I}_B$$

となり，$S(\hat{\rho}_{AB})$ は零にならずに最大縺れ純粋状態と同じ $\ln 2$ を与えてしまう．混合状態にも使用できる量子縺れ測度は 4.6 節で扱う．

最後に量子縺れ測度としての量子縺れエントロピー $S(|\Psi\rangle_{AB})$ の長所に関するコメントを与える．量子情報処理でも重要な量子縺れの濃縮及び希釈過程において $S(|\Psi\rangle_{AB})$ は基本的な役目を担う [16],[21]．例えば $|\Psi\rangle_{AB}$ という純粋状態にある 2 量子ビット系を N 個用意しよう．N が十分に大きい場合，$(|\Psi\rangle_{AB})^{\otimes N}$

に対して最適な LOCC を施すと確率的に $|Bell_0\rangle_{AB}$ が平均 $NS(|\Psi\rangle_{AB})$ 個取り出せることが知られている．$|Bell_0\rangle_{AB}$ は基礎的な 2 量子ビット系の最大縺れ状態であり，量子縺れの定量化の単位としてしばしば使用される．この過程を量子縺れ濃縮 (quantum entanglement concentration) と呼ぶ．逆に $(|Bell_0\rangle_{AB})^{\otimes NS(|\Psi\rangle_{AB})}$ からもとの $(|\Psi\rangle_{AB})^{\otimes N}$ を作る LOCC も存在する．この逆過程は量子縺れ希釈 (quantum entanglement dilution) と呼ばれる．ここで 2 量子ビット系を考えたが，一般の 2 体系の N 個の合成系に対しても同様のことが言える．従って十分多数個の 2 体系を考える前提において，$S(|\Psi\rangle_{AB})$ は 1 つの $|\Psi\rangle_{AB}$ の中に $|Bell_0\rangle_{AB}$ を単位とした量子縺れがどのくらい含まれているかを表す重要な指標になっている．

4.4 2 体系の状態変化と量子エンタングルメント

前節で 2 体系の純粋状態に対する量子縺れの測度としての量子縺れエントロピーを導入した．始状態 $|\Psi_1\rangle_{AB}$ を LOCC で $|\Psi_2\rangle_{AB}$ にした時に (4.12) 式から量子縺れの増加はあり得ないことは明らかである．それでは一般に

$$S\left(|\Psi_{in}\rangle_{AB}\right) \geq S\left(|\Psi_{out}\rangle_{AB}\right) \tag{4.22}$$

を満たす 2 つの $|\Psi_{in}\rangle_{AB}$ と $|\Psi_{out}\rangle_{AB}$ という状態を考えた時，$|\Psi_{in}\rangle_{AB}$ を $|\Psi_{out}\rangle_{AB}$ にする LOCC は存在するかという問題を考えてみよう．実は 2 量子ビット系ではこのような LOCC が常に存在することを示せる．まず任意の $|\Psi_{in}\rangle_{AB}$ はそのシュミット分解に局所的ユニタリー変換 $\hat{U}_A\hat{U}'_B$ を施すことによって $\frac{1}{2} \leq p_{in} \leq 1$ を満たす状態

$$|\Phi_{in}\rangle_{AB} = \hat{U}_A\hat{U}'_B|\Psi_{in}\rangle_{AB} = \sqrt{p_{in}}|+\rangle_A|+\rangle_B + \sqrt{1-p_{in}}|-\rangle_A|-\rangle_B$$

という状態に変化させられる．但し量子縺れに変化はない．

$$S\left(|\Phi_{in}\rangle_{AB}\right) = S\left(|\Psi_{in}\rangle_{AB}\right).$$

同様に $|\Psi_{out}\rangle_{AB}$ もシュミット分解と $\hat{V}_A^\dagger\hat{V}_B'^\dagger$ という局所的ユニタリー変換を用いて $\frac{1}{2} \leq p_{out} \leq 1$ を満たす

$$|\Phi_{out}\rangle_{AB} = \sqrt{p_{out}}|+\rangle_A|+\rangle_B + \sqrt{1-p_{out}}|-\rangle_A|-\rangle_B$$

という状態に必ずできる．この過程でも

$$S\left(|\Phi_{out}\rangle_{AB}\right) = S\left(|\Psi_{out}\rangle_{AB}\right)$$

が成り立つ．従って

$$S\left(|\Phi_{in}\rangle_{AB}\right) \geq S\left(|\Phi_{out}\rangle_{AB}\right) \tag{4.23}$$

の時に，$|\Phi_{in}\rangle_{AB} \to |\Phi_{out}\rangle_{AB}$ となる LOCC を具体的に構築できれば十分である．(4.23) 式の条件は $S\left(|\Phi\rangle_{AB}\right)$ の具体的計算から

$$p_{out} \geq p_{in} \tag{4.24}$$

と等価であることも分かる．以下では (4.24) 式の条件のもとで $|\Phi_{in}\rangle_{AB} \to |\Phi_{out}\rangle_{AB}$ を実現する具体的な LOCC の例を与えよう．ここで

$$g = \frac{3}{4}\frac{p_{out} - p_{in}}{p_{out} - \frac{1}{2}}$$

という実数パラメータを定義しよう．今の条件のもとでは

$$0 \leq g \leq \frac{3}{4}$$

という領域の値をとる．この g と p_{out}, p_{in} を用いて，以下の A に対する 4 値の測定演算子を定義しよう．

$$\hat{M}_{0A} = \sqrt{1-g}\left(\sqrt{\frac{p_{out}}{p_{in}}}|+\rangle_A\langle+|_A + \sqrt{\frac{1-p_{out}}{1-p_{in}}}|-\rangle_A\langle-|_A\right), \tag{4.25}$$

$$\hat{M}_{1A} = \sqrt{\frac{g}{3}}\left(\sqrt{\frac{p_{out}}{1-p_{in}}}|+\rangle_A\langle-|_A + \sqrt{\frac{1-p_{out}}{p_{in}}}|-\rangle_A\langle+|_A\right), \tag{4.26}$$

$$\hat{M}_{2A} = i\sqrt{\frac{g}{3}}\left(\sqrt{\frac{p_{out}}{1-p_{in}}}|+\rangle_A\langle-|_A - \sqrt{\frac{1-p_{out}}{p_{in}}}|-\rangle_A\langle+|_A\right), \tag{4.27}$$

$$\hat{M}_{3A} = \sqrt{\frac{g}{3}}\left(\sqrt{\frac{p_{out}}{p_{in}}}|+\rangle_A\langle+|_A - \sqrt{\frac{1-p_{out}}{1-p_{in}}}|-\rangle_A\langle-|_A\right). \tag{4.28}$$

これらが測定演算子の規格化条件

$$\sum_{\mu=0}^{3}\hat{M}_{\mu A}^{\dagger}\hat{M}_{\mu A} = \hat{I}_A$$

を満たすことは直接代入で確かめられる．この測定演算子を $|\Phi_{in}\rangle_{AB}$ に作用させると

$$\hat{M}_{0A}|\Phi_{in}\rangle_{AB} = \sqrt{1-g}|\Phi_{out}\rangle_{AB}, \tag{4.29}$$

$$\hat{M}_{sA}|\Phi_{in}\rangle_{AB} = \sqrt{\frac{g}{3}}\left(\hat{\sigma}_{sB}\right)^{-1}|\Phi_{out}\rangle_{AB}, \qquad (s=1,2,3) \tag{4.30}$$

という結果になる．ここで B に対する 4 つの局所的ユニタリー演算子を以下のように定義しよう．

$$\hat{U}_{0B} = \hat{I}_B, \tag{4.31}$$

$$\hat{U}_{sB} = \hat{\sigma}_{sB}, \qquad (s=1,2,3) \tag{4.32}$$

この $\hat{U}_{\mu B}$ $(\mu = 0 \sim 3)$ と (4.29) 式，(4.30) 式の結果を使うと

$$\sum_{\mu=0}^{3}\hat{U}_{\mu B}\hat{M}_{\mu A}|\Phi_{in}\rangle_{AB}\langle\Phi_{in}|_{AB}\hat{M}_{\mu A}^{\dagger}\hat{U}_{\mu B}^{\dagger} = |\Phi_{out}\rangle_{AB}\langle\Phi_{out}|_{AB}$$

が証明できる．従って $|\Psi_{in}\rangle_{AB}$ に対して以下の (i) から (v) までの操作で構成される LOCC を行うと確かに $|\Psi_{out}\rangle_{AB}$ になることが確かめられた．

(i) A と B に局所的ユニタリー操作 $\hat{U}_A\hat{U}'_B$ を行い，状態を $|\Phi_{in}\rangle_{AB}$ に変換する．
(ii) (4.25) 式，(4.28) 式で定義される POVM 測定を A に行い，測定結果 μ を得る．
(iii) 測定結果 μ を A から B に古典通信で送る．
(iv) (4.31) 式，(4.32) 式で定義される μ に依存した局所的ユニタリー操作を B に行い，状態を $|\Phi_{out}\rangle_{AB}$ に変換する．
(v) A と B に局所的ユニタリー操作 $\hat{V}_A\hat{V}'_B$ を行い，状態を $|\Psi_{out}\rangle_{AB}$ にする．

この事実から 1 つの最大量子縺れ状態に対して LOCC 操作をすれば任意の純粋状態が生成されることが分かる．

ここでの 2 量子ビット系の結果は残念ながらそのままの形では一般の 2 体系に拡張できない．(4.22) 式は $|\Psi_{in}\rangle_{AB}$ から $|\Psi_{out}\rangle_{AB}$ を作る LOCC の存在の十分条件ではないのである．一般の 2 体量子系に対する必要十分条件はマジョリゼイション (majorization) という概念を用いて与えられる [21]．考える量子系 A のヒルベルト空間の次元を N としよう．その一般の状態 $\hat{\rho}$ が与えられた時にその固有値 p_n が

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_N$$

という大きさの順に並ぶように添え字 n が付けられているとする．2 つの状態 $\hat{\rho}$, $\hat{\rho}'$ に対してその固有値 p_n, p'_n が $k = 1 \sim N-1$ に対する

$$\sum_{n=1}^{k} p_k \geq \sum_{n=1}^{k} p'_k$$

という $N-1$ 個の不等式を満たす時

$$\hat{\rho} \succeq \hat{\rho}'$$

と表し，この順序概念をマジョリゼイションと呼ぶ．なお任意の 2 個の状態を持ってきてもマジョリゼイションの意味での大小関係は定義さえできない場合があることに注意しよう．例えば 1 から $N-1$ までの間のある自然数 k に対しては

$$\sum_{n=1}^{k} p_k > \sum_{n=1}^{k} p'_k$$

でも次の $k+1$ に関しては

$$\sum_{n=1}^{k+1} p_k < \sum_{n=1}^{k+1} p'_k$$

となる場合もある．一般の 2 体系において $|\Psi_{in}\rangle_{AB} \to |\Psi_{out}\rangle_{AB}$ と変化させられる LOCC の存在の必要十分条件は以下で与えられることが知られている [31]．

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{B}\left[|\Psi_{out}\rangle_{AB}\langle\Psi_{out}|_{AB}\right] \succeq \mathop{\mathrm{Tr}}_{B}\left[|\Psi_{in}\rangle_{AB}\langle\Psi_{in}|_{AB}\right] \tag{4.33}$$

この条件は A, B に関する任意の局所的ユニタリー変換 $\hat{U}_A\hat{U}'_B$ のもとで不変であり，また部分トレースは B ではなく A でとっても構わない．この系の完全正規直交基底 $\{|n\rangle\}$ を用いて書かれる

$$|I\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}|n\rangle_A|n\rangle_B$$

という状態は最大量子縺れ状態であるが，任意の純粋状態 $|\Psi_{out}\rangle_{AB}$ に対して

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{B}\left[|\Psi_{out}\rangle_{AB}\langle\Psi_{out}|_{AB}\right] \succeq \mathop{\mathrm{Tr}}_{B}\left[|I\rangle_{AB}\langle I|_{AB}\right]$$

が成り立つ．これは大きさで順序付けされた任意の確率分布 $(p_1, p_2, \cdots, p_N)$ は一様分布 $p'_n = 1/N$ に対して

$$\sum_{n=1}^{k} p_k \geq \frac{k}{N}$$

が $k = 1 \sim N-1$ で成立するからである．$|I\rangle_{AB}$ に局所的ユニタリー変換 $\hat{U}_A\hat{U}'_B$ をすれば任意の最大量子縺れ状態を生成できる．従って一般の 2 体量子系でも任意の純粋状態を 1 つの最大量子縺れ状態から LOCC で作れるのだ．しかし (4.22) 式を満たす一般の状態 $|\Psi_{in}\rangle_{AB}, |\Psi_{out}\rangle_{AB}$ では必ずしも (4.33) 式の関係は成り立たないため $|\Psi_{in}\rangle_{AB} \to |\Psi_{out}\rangle_{AB}$ を実現する LOCC は存在するとは限らないのである．2 量子ビット系の場合は特殊であり，(4.22) 式の条件と (4.33) 式の条件が等価になっている．

4.5 確率的 LOCC による状態変化と多体系の量子エンタングルメント

ここでは多体系の確率的 LOCC (stochastic LOCC, 略して SLOCC) による状態変化についての議論を行う．多体系のある純粋状態 $|\Psi_1\rangle$ に LOCC を施して別な $|\Psi_2\rangle$ という状態に有限確率で変化させられるかという問題である．LOCC のもとで量子縺れは単調性を満たしたが，SLOCC では量子縺れの小さな状態から大きな状態に変化することも 1 より小さな確率ならば許される．$|\Psi_1\rangle$ と $|\Psi_2\rangle$ が SLOCC によって行き来できる時に 2 つは SLOCC 同値であると定義しよう．これによってヒルベルト空間内に SLOCC 同値類が導入できる．ではどのような SLOCC 同値類が存在するのか考えてみよう．このような解析は多体系の量子縺れの分類に役立つ．

最初に前節で扱った 2 量子ビット系を扱う．以下で見るように，この系では

一般の量子縺れ状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ でも SLOCC によって任意の状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ に変化させられる．つまり量子縺れの小さい状態でもある確率でより大きな量子縺れの状態に変化させられる．但し縺れていない直積状態だけは SLOCC でも量子縺れ状態に変化させることはできない．従ってこの系には縺れている状態が属する同値類と，縺れていない状態が属する同値類の 2 つの SLOCC 同値類が存在する．これを具体的にみてみよう．量子縺れ状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ は

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{p}|u_+\rangle_A|v_+\rangle_B + \sqrt{1-p}|u_-\rangle_A|v_-\rangle_B$$

とシュミット分解できる．量子縺れが存在する条件は $0 < p < 1$ と書かれる．ここで $|u_\pm\rangle_A$ を用いて A に作用する 3 つの局所的演算子

$$\hat{O}_{1A} = |u_-\rangle_A\langle u_+|_A + |u_+\rangle_A\langle u_-|_A,$$
$$\hat{O}_{2A} = i|u_-\rangle_A\langle u_+|_A - i|u_+\rangle_A\langle u_-|_A,$$
$$\hat{O}_{3A} = |u_+\rangle_A\langle u_+|_A - |u_-\rangle_A\langle u_-|_A$$

を定義しよう．$\hat{O}_{sA}$ $(s=1,2,3)$ がパウリ演算子とユニタリー同型であることからも分かるように，任意の A に対する局所的演算子 $\hat{O}_A$ はいつでも

$$\hat{O}_A = c_0\hat{I}_A + \sum_{s=1}^{3} c_s\hat{O}_{sA}$$

と一意に展開できる．ここで重要なのは以下の特別な 4 つの演算子を $|\Psi\rangle_{AB}$ に作用させることで AB の完全正規直交基底が生成できる点である．

$$|u_+\rangle_A|v_+\rangle_B = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left(\hat{I}_A + \hat{O}_{3A}\right)|\Psi\rangle_{AB},$$
$$|u_-\rangle_A|v_-\rangle_B = \frac{1}{2\sqrt{1-p}}\left(\hat{I}_A - \hat{O}_{3A}\right)|\Psi\rangle_{AB},$$
$$|u_+\rangle_A|v_-\rangle_B = \frac{1}{2\sqrt{1-p}}\left(\hat{O}_{1A} + i\hat{O}_{2A}\right)|\Psi\rangle_{AB},$$
$$|u_-\rangle_A|v_+\rangle_B = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left(\hat{O}_{1A} - i\hat{O}_{2A}\right)|\Psi\rangle_{AB}.$$

このことから任意の局所的演算子 $\hat{O}_A$ を $|\Psi\rangle_{AB}$ に作用させることで，AB の任意の状態を生成できるも導かれる．例えば

$$c_\pm = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} \pm \frac{1}{\sqrt{1-p}}\right)$$

という係数で決まる A の局所的演算子 $c_+\hat{I}_A + c_-\hat{O}_{3A}$ を作用させると

$$\left(c_+\hat{I}_A + c_-\hat{O}_{3A}\right)|g\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_+\rangle_A|v_+\rangle_B + |u_-\rangle_A|v_-\rangle_B\right) \qquad (4.34)$$

という最大縺れ状態も作れる．量子縺れの単調性を考えると，大きな量子縺れ状態が作られたこの結果は一見不思議に思えるかもしれない．ポイントは量子縺れを増やす $c_+\hat{I}_A + c_-\hat{U}_A$ のような演算子は数学的に確かに A の局所的

演算子ではあるが，それが局所的 TPCP 写像 Γ_A で記述される物理的操作には一般に対応しないというところにある．例えば量子縺れを増やしてしまう $c_+\hat{I}_A + c_-\hat{U}_A$ がユニタリー演算子になるようなことは決してないのだ．後述するように $c_+\hat{I}_A + c_-\hat{U}_A$ はある測定演算子の 1 つの成分にはできるが，確率 1 で量子縺れを増やす物理的操作を記述しない．次に $\hat{O}_A|\Psi\rangle_{AB}$ の重ね合わせが AB 系の全ての状態を尽くすという事実から，任意の状態 $|\Phi\rangle_{AB}$ が SLOCC で量子縺れ状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ から作れることを実際に示そう．まず最初にある $\hat{O}_A$ が存在して

$$|\Phi\rangle_{AB} = \hat{O}_A|\Psi\rangle_{AB} \tag{4.35}$$

が成り立っている．この $\hat{O}_A$ に正数 c をかけることで

$$\hat{M}_{0A} = c\hat{O}_A \tag{4.36}$$

という演算子を定義し，それから作られる非負エルミート演算子 $\hat{M}_{0A}^\dagger\hat{M}_{0A}$ の全ての固有値 p_n が

$$0 \le p_n \le 1$$

となるようにしよう．有限次元系ならばこれはいつでも可能である．そしてもう 1 つの演算子

$$\hat{M}_{1A} = \sqrt{\hat{I}_A - \hat{M}_{0A}^\dagger\hat{M}_{0A}}$$

を定義すれば $\hat{M}_{0A}^\dagger\hat{M}_{0A} + \hat{M}_{0A}^\dagger\hat{M}_{0A} = \hat{I}_A$ が成り立つため $\left\{\hat{M}_{0A}, \hat{M}_{1A}\right\}$ は 2 値の測定演算子とみなせる．対応する一般測定も A に対する局所的な物理操作とみなせる．これを $|\Psi\rangle_{AB}$ に対して施すと確率

$$p_0 = \langle\Psi|_{AB}\hat{M}_{0A}^\dagger\hat{M}_{0A}|\Psi\rangle_{AB} = |c|^2 \neq 0$$

で結果 0 が出力され，その測定後状態は (4.35) 式から

$$\frac{1}{\sqrt{p_0}}\hat{M}_{0A}|\Psi\rangle_{AB} = |\Phi\rangle_{AB}$$

となることが示される．p_0 はもちろん 1 にはならないが，SLOCC では状態 $|\Phi\rangle_{AB}$ が生成されることになる．確率的生成に過ぎないため $|\Phi\rangle_{AB}$ の量子縺れは $|\Psi\rangle_{AB}$ よりも大きくて構わない．但し，測定後の平均量子縺れ量は $|\Psi\rangle_{AB}$ の量子縺れより決して大きくはならないことに留意しよう．

上の議論から 2 量子ビット系純粋状態の量子縺れは 2 つのクラスの同値類に分類されることが分かった．一方は量子縺れエントロピー $S=0$ である直積状態の同値類 $EC_{non-ent}$ であり，他方は $S \neq 0$ の量子縺れ状態の同値類 EC_{ent} である．それぞれの同値類の中の 2 つの状態は互いに SLOCC で移り変われる．EC_{ent} に属する状態は LOCC で $EC_{non-ent}$ に変化できるが，$EC_{non-ent}$ の

状態は SLOCC でも EC_{ent} の状態に変化できない．

3 量子ビット系では 2 つの非自明な量子縺れを保有する SLOCC 同値類の存在が知られている[32]．$\hat{\sigma}_3|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ として，一方は

$$|W\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + |+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 + |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3\right)$$

で定義される W 状態と SLOCC で行き来できる状態の同値類 EC_W である．他方は

$$|GHZ\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 + |-\rangle_1|-\rangle_2|-\rangle_3\right)$$

で定義される GHZ 状態 (Greenberger–Horne–Zeilinger state) と SLOCC で行き来できる状態の同値類 EC_{GHZ} である．$|W\rangle_{123}$ の特徴はどの 2 体部分系の縮約状態にも量子縺れが残る点にある．一方 $|GHZ\rangle_{123}$ はどの 2 体部分系の縮約状態にも量子縺れが残らない．この他に自明な同値類として 2 体系の量子縺れ状態と 1 体の純粋状態の積で書かれる状態が属する 3 つの異なる同値類と，量子縺れを全く持たない 3 体直積状態の同値類がある．EC_W に属する状態と EC_{GHZ} に属する状態は SLOCC でも行き来できない．また EC_W と EC_{GHZ} の状態は SLOCC で自明な同値類に行けるが，そこからは戻れない．有限次元系では一般に SLOCC で $|\Psi\rangle_{123}$ から $|\Phi\rangle_{123}$ に変化させられる条件はそれぞれの部分系に作用するある局所的演算子 $\hat{O}_1 \otimes \hat{O}'_2 \otimes \hat{O}''_3$ が存在して

$$|\Phi\rangle_{123} = \left(\hat{O}_1 \otimes \hat{O}'_2 \otimes \hat{O}''_3\right)|\Psi\rangle_{123} \tag{4.37}$$

が成り立つことと等価である．これは $\hat{O}_1 \otimes \hat{O}'_2 \otimes \hat{O}''_3$ を定数倍をすることで特定の測定の測定演算子の 1 つの成分を作れるためである．(4.37) 式の関係を用いると，例えば $|W\rangle_{123}$ が SLOCC で $|GHZ\rangle_{123}$ に移れないことは以下のように簡単に分かる．3 つの規格化されていない状態ベクトル

$$|a_\pm\rangle_1 = \hat{O}_1|\pm\rangle_1, \qquad |b_\pm\rangle_2 = \hat{O}'_2|\pm\rangle_2, \qquad |c_\pm\rangle_3 = \hat{O}''_3|\pm\rangle_3$$

を定義すると，操作後の状態は

$$\begin{aligned}&\left(\hat{O}_1 \otimes \hat{O}'_2 \otimes \hat{O}''_3\right)|W\rangle_{123}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|a_+\rangle_1|b_+\rangle_2|c_-\rangle_3 + |a_+\rangle_1|b_-\rangle_2|c_+\rangle_3 + |a_-\rangle_1|b_+\rangle_2|c_+\rangle_3\right)\end{aligned}$$

と書ける．この状態を $|GHZ\rangle_{123}$ と一致させるには，右辺の状態和の中にある 3 つの状態ベクトルを 2 つの状態ベクトルに減らす必要がある．そのためには $|a_-\rangle_1, |b_-\rangle_2, |c_-\rangle_3$ のどれか 1 つを 0 ベクトルにするような $\hat{O}_1 \otimes \hat{O}'_2 \otimes \hat{O}''_3$ である必要がある．例えば $|a_-\rangle_1 = 0$ とすると，

$$\left(\hat{O}_1 \otimes \hat{O}'_2 \otimes \hat{O}''_3\right)|W\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}|a_+\rangle_1\left(|b_+\rangle_2|c_-\rangle_3 + |b_-\rangle_2|c_+\rangle_3\right)$$

となるが，これは 2, 3 系の縺れ状態と 1 系の純粋状態の直積になってしまい，3 体間で非自明に縺れている $|GHZ\rangle_{123}$ にはなりようがない．同様に $|b_-\rangle_2 = 0$ や $|c_-\rangle_3 = 0$ の場合でも 2 体系と 1 体系の直積状態になり，やはり $|GHZ\rangle_{123}$ は決して生成されない．従って SLOCC で $|W\rangle_{123} \rightarrow |GHZ\rangle_{123}$ という変化は起きないことが分かる．この議論を一般化することにより，先の SLOCC のもとでの量子縺れ同値類の分類が完成できる[32]．一般の多体系でもその部分系の数やヒルベルト空間の次元が増すごとに多様な SLOCC 同値類が現れると予想される．

最後に量子場系の SLOCC 同値類についてのコメントを与えよう．量子場は無限次元系であるため多数の SLOCC 同値類の存在が期待される量子系である．しかしリー–シュリーダー定理 (Reeh–Schlieder theorem)[33] というものが知られており，有界時空領域 R 内の局所的演算子の線形和 $\hat{O}_n(R)$ を真空状態 $|0\rangle$ に作用させると，生成される状態が量子場の全ヒルベルト空間に稠密 (dense) に分布することが主張される．これはちょうど 2 量子ビット系の量子縺れ状態の上で述べた性質と一見似た性質が $|0\rangle$ にあることを意味している．しかし量子場系では一般に $\hat{O}_n(R)^\dagger \hat{O}_n(R)$ の固有値は無限大に発散している．このため (4.36) 式のような定数倍による $\hat{O}_n(R)$ の再規格化では一般測定の測定演算子を作れない．従ってリー–シュリーダー定理自体は $|0\rangle$ から SLOCC で作られる状態がヒルベルト空間に稠密に分布することを直接意味していない．$\hat{O}_n(R)|0\rangle$ のヒルベルト空間での稠密性自体も物理的な意味において十分に任意な状態生成を意味するかどうかも明確ではない．例えば無限次元系では，限りなく近い 2 つの状態でも量子縺れエントロピーが全く違うこともある．例えば自由場の演算子から作られる離散的調和振動子モード A, B を考えよう．そして正の整数 N に対して定まる

$$|\Psi_N\rangle_{AB} = \sqrt{1 - \frac{1}{\ln N}}|0\rangle_A|0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{N \ln N}} \sum_{n=1}^{N} |n\rangle_A|n\rangle_B \qquad (4.38)$$

という状態列 $\{|\Psi_N\rangle_{AB}\}$ に注目してみよう．ここで $|0\rangle$ はそれぞれのモード系の基底状態であり，$|n\rangle$ は第 n 励起状態である．この状態列に対する $N \rightarrow \infty$ の極限では

$$\lim_{N\rightarrow\infty} |\langle 0|_A \langle 0|_B |\Psi_N\rangle_{AB}|^2 = 1$$

が成り立ち，$|\Psi_N\rangle_{AB}$ は $|0\rangle_A|0\rangle_B$ という直積状態に漸近している．しかし $|0\rangle_A|0\rangle_B$ の量子縺れエントロピーが $S(|0\rangle_A|0\rangle_B) = 0$ であるのと対照的に $|\Psi_N\rangle_{AB}$ は

$$\lim_{N\rightarrow\infty} S(|\Psi_N\rangle_{AB}) = 1$$

という不連続な極限を持つ．この事実も無限次元系の量子縺れの非自明さを表

している．なお調和振動子の通常のハミルトニアンを考えると (4.38) 式の状態でのエネルギー期待値は $N \to \infty$ において発散しているため，ある閾値以下のエネルギー期待値をとる状態に制限して量子縺れを論ずる立場もある．この場合 $S(|\Psi\rangle_{AB})$ はトレースノルムに対して連続になることは証明されている[34]．しかし様々なハミルトニアンを持つ無限次元モデルに対してエネルギー期待値を制限することだけで同様の量子縺れの連続性が保証されるかについては知られていない．このような観察からも量子場系における SLOCC 同値類の分類はとても非自明な問題であることが分かる．

4.6 混合状態に対するエンタングルメント測度の一般論

量子縺れエントロピーは純粋状態に対してしか量子縺れ測度の意味がなかった．ここでは混合状態まで応用可能な量子縺れ測度の一般論を議論する．任意の量子系 A と B からなる 2 体系を考える．状態 $\hat{\rho}_{AB}$ を非負の実数値に写像する関数 $F[\hat{\rho}_{AB}]$ (≥ 0) が以下の性質を満たす時，これを混合状態の量子縺れ測度と呼ぶ．

(M0) 直積状態における部分トレース不変性：状態 $\hat{\varrho}_R$ にある補助系 R を加えて合成系 ABR を作る．A を 1 つの部分系，BR を他方の部分系とみなした場合

$$F[\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R] = F[\hat{\rho}_{AB}] \tag{4.39}$$

が成り立つ．

(M1) 局所的ユニタリー不変性：

$$F\left[\hat{U}_A\hat{U}'_B\hat{\rho}_{AB}\hat{U}_A^\dagger\hat{U}_B'^\dagger\right] = F[\hat{\rho}_{AB}]. \tag{4.40}$$

(M2) 量子縺れを持たない分離可能状態に対しては零を与える．：

$$F\left[\sum_n p_n\hat{\rho}_{\mu A}\otimes\hat{\rho}'_{\mu B}\right] = 0. \tag{4.41}$$

(M3) $\hat{\rho}_{AB}$ を LOCC で操作して確率 p_μ で状態 $\hat{\rho}(\mu)_{AB}$ が作れる場合の単調性：

$$F[\hat{\rho}_{AB}] \geq \sum_\mu p_\mu F[\hat{\rho}(\mu)_{AB}]. \tag{4.42}$$

(M4) LOCC における操作後の状態平均に対する単調性：

$$F[\hat{\rho}_{AB}] \geq F\left[\sum_\mu p_\mu\hat{\rho}(\mu)_{AB}\right]. \tag{4.43}$$

(M0) は A や B と全く相関を持たない補助系 R が外部にあってもその存在

は A と B の間の量子縺れに何も影響がないことを意味する自然な条件である．もし $F_{cv}[\hat{\rho}]$ という関数が任意の確率分布 p_n と量子状態 $\hat{\rho}_n$ に対して

$$\sum_n p_n F_{cv}[\hat{\rho}_n] \geq F_{cv}\left[\sum_n p_n \hat{\rho}_n\right] \tag{4.44}$$

を満たす行列凸関数 (matrix convex function) ならば，(M3) の性質から自動的に (M4) の性質は導出される．一般に (4.44) 式と

$$F_{cv}[\hat{\rho}] \geq 0$$

を満たす一般の非負行列凸関数 $F_{cv}[\hat{\rho}]$ が以下の性質を満たすならば，$F_{cv}[\hat{\rho}_{AB}]$ は量子縺れ測度になることが示される[35]．

(H0) 任意の直積状態 $\hat{\rho}_A\hat{\rho}'_B$ に対して

$$F_{cv}[\hat{\rho}_A\hat{\rho}'_B] = 0.$$

(H1) 局所的ユニタリー変換不変性：

$$F_{cv}\left[\hat{U}_A\hat{U}'_B\hat{\rho}_{AB}\hat{U}_A^\dagger\hat{U}_B'^\dagger\right] = F_{cv}[\hat{\rho}_{AB}].$$

更に A の空間領域にある他の量子系 R_A まで含めて A を再定義しても，また B の空間領域にある他の量子系 R_B まで含めて B を再定義しても，この不変性が成り立つことを要請する.（なお $\hat{U}_{AR_A}$ や $\hat{U}_{BR_B}$ は再定義された A や B に対する局所的ユニタリー演算子とみなす.）

(H2) A を A' と補助系 R の合成系とする．そして $\{|m\rangle_R\}$ は互いに直交する R の状態の集合とする．この時

$$F_{cv}\left[\sum_m p_m \hat{\rho}_{mA'B}|m\rangle_R\langle m|_R\right] = \sum_m p_m F_{cv}[\hat{\rho}_{mA'B}] \tag{4.45}$$

が成り立つ．同時に A と B を入れ替えても同様の関係が成り立つ．

非負行列凸関数 F_{cv} が (H0), (H1), (H2) を満たす時，F_{cv} は (M0) から (M4) の性質を満たすことが証明できる．(M0) の性質は以下のように導かれる．$\hat{\varrho}_R$ のスペクトル分解を

$$\hat{\varrho}_R = \sum_{m=1} p_m |m\rangle_R\langle m|_R$$

とすると (H2) から

$$F_{cv}[\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R] = F_{cv}\left[\sum_{m=1} p_m\hat{\rho}_{AB}|m\rangle_R\langle m|_R\right] = \sum_{m=1} p_m F_{cv}[\hat{\rho}_{AB}] = F_{cv}[\hat{\rho}_{AB}]$$

が示される．(M1) の性質は (H1) と同じであるので自明である．(4.44) 式の凸

性と (H0) を用いると任意の分離可能状態に対して

$$F_{cv}\left[\sum_n p_n \hat{\rho}_{\mu A}\hat{\rho}'_{\mu B}\right] \le \sum_n p_n F_{cv}\left[\hat{\rho}_{\mu A}\hat{\rho}'_{\mu B}\right] = 0$$

が確かめられる．一方定義により $F_{cv}[\hat{\rho}] \ge 0$ が成り立つため，(4.41) 式の (M2) の性質が成り立つ．次に (M3) の性質を証明する．最初に $\hat{\rho}_{AB}$ の状態において A の一般測定の場合に (4.42) 式を示そう．測定結果 μ を得る確率を p_μ とし，測定後状態を $\hat{\rho}(\mu)_{AB}$ とする．このような任意の測定は物理的間接測定のモデルで実現できる．アリスが A の領域にいて，ボブが B の領域にいるとしよう．アリスは始状態 $\hat{\varrho}_R$ にある測定機のプローブ系 R を A に接触させ，ユニタリー演算子 $\hat{U}_{AR}$ で記述できる操作を行う．その後 R を A から切り離して，R に対して物理量

$$\hat{\mu}_R = \sum_\mu \mu|\mu\rangle_R\langle\mu|_R$$

の理想測定を行う．相互作用直後の全体系の状態は

$$\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right)\hat{U}^\dagger_{AR}$$

であるが，μ という結果を得た測定後は

$$\left(\langle\mu|_R\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_{AB}\otimes\hat{\varrho}_R\right)\hat{U}^\dagger_{AR}|\mu\rangle_R\right)\left(|\mu\rangle_R\langle\mu|_R\right) = \hat{\rho}(\mu)_{AB}|\mu\rangle_R\langle\mu|_R$$

になっている．従って測定後の平均状態は

$$\hat{\omega}_{ABR} = \sum_\mu p_\mu \hat{\rho}(\mu)_{AB}|\mu\rangle_R\langle\mu|_R \tag{4.46}$$

で与えられる．R のヒルベルト空間の次元を N_R としよう．固有値 μ の集合は $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{N_R}\}$ で与えられているとする．そして 0 から 2π の間の実数をランダムにとる N_R 個の変数 $\theta = (\theta(\mu_1), \cdots, \theta(\mu_{N_R}))$ を考える．これを用いて

$$\hat{U}_R(\theta) = \exp\left(i\sum_{n=1}^{N_R}\theta(\mu_n)|\mu_n\rangle_R\langle\mu_n|_R\right)$$

というユニタリー演算子を定義しよう．これを用いて

$$\Gamma_R[\hat{\rho}_R] = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1}{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_{N_R}}{2\pi}\hat{U}_R(\theta)\,\hat{\rho}_R\hat{U}^\dagger_R(\theta)$$

で定義される TPCP 写像 Γ_R を考えよう．ここで (4.46) 式の $\hat{\omega}_{ABR}$ は

$$\hat{\omega}_{ABR} = \Gamma_R\left[\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_{AB}\otimes\hat{\varrho}_R\right)\hat{U}^\dagger_{AR}\right]$$

とも書けることに注目しよう．定義から Γ_R はユニタリー操作の確率的な古典的重ね合わせであることから F_{cv} の凸性を用いて

$$
\begin{aligned}
&F_{cv}\left[\hat{\omega}_{ABR}\right] \\
&= F_{cv}\left[\Gamma_R\left[\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right)\hat{U}_{AR}^\dagger\right]\right] \\
&\le \int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1}{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_{N_R}}{2\pi}F_{cv}\left[\hat{U}_R(\theta)\left(\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right)\hat{U}_{AR}^\dagger\right)\hat{U}_R^\dagger(\theta)\right]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また R は A の存在する空間領域にあるため $\hat{U}_R(\theta)$ と同様に $\hat{U}_{AR}$ が A の領域の局所的演算子であることに留意すると (H1) の性質から

$$
F_{cv}\left[\hat{U}_R(\theta)\left(\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right)\hat{U}_{AR}^\dagger\right)\hat{U}_R^\dagger(\theta)\right] = F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right]
$$

が言える．従って

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1}{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_{N_R}}{2\pi}F_{cv}\left[\hat{U}_R(\theta)\left(\hat{U}_{AR}\left(\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right)\hat{U}_{AR}^\dagger\right)\hat{U}_R^\dagger(\theta)\right] \\
&= F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right]\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1}{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_{N_R}}{2\pi} \\
&= F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\hat{\varrho}_R\right] = F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\right]
\end{aligned}
$$

という関係を得る．なお最後で既に証明済みの (M0) の性質を使った．一方 (H2) を (4.46) 式にそのまま用いると

$$
F_{cv}\left[\hat{\omega}_{ABR}\right] = \sum_\mu p_\mu F_{cv}\left[\hat{\rho}(\mu)_{AB}|\mu\rangle_R\langle\mu|_R\right] = \sum_\mu p_\mu F_{cv}\left[\hat{\rho}(\mu)_{AB}\right]
$$

も成り立つため，$F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\right] \ge F_{cv}\left[\hat{\omega}_{ABR}\right]$ から (4.42) 式が示された．前に述べたように LOCC は A の一般測定をしてその結果に依存した B の一般測定をし，そしてその結果に依存した A の測定をするという繰り返しによって記述できる．$\hat{\rho}(\mu)_{AB}$ に対して B の測定を行う場合，上の結果から測定結果 ν を観測する確率分布 $q_\nu(\mu)$ ($\sum_\nu q_\nu(\mu) = 1$) とその測定後状態 $\hat{\rho}(\mu,\nu)_{AB}$ に対しては

$$
F_{cv}\left[\hat{\rho}(\mu)_{AB}\right] \ge \sum_\nu q_\nu(\mu) F_{cv}\left[\hat{\rho}(\mu,\nu)_{AB}\right]
$$

が成り立つ．これを (4.42) 式の右辺に代入すると

$$
F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\right] \ge \sum_{\mu\nu} p_\mu q_\nu(\mu) F_{cv}\left[\hat{\rho}(\mu,\nu)_{AB}\right]
$$

を得る．ここで $p_{\mu\nu} = p_\mu q_\nu(\mu)$ と定義し，この A と B の測定の合成操作を測定結果 (μ,ν) を出力する 1 つの測定とみなすことで (4.42) 式がこの場合も成立することが確かめられる．A と B の測定を交互に繰り返せば任意の LOCC に対しても (4.42) 式が成り立つため，性質 (M3) が一般の LOCC に対して示される．また先に述べたように F_{cv} の凸性から，(M3) から (M4) の性質は導かれる．従って (H0), (H1), (H2) を満たす非負行列凸関数 F_{cv} を用いた $F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は確かに量子縺れ測度であることが示された．逆に非負行列凸関数 F_{cv} を用いた量子縺れ測度 $F_{cv}\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は (M0), (M1), (M3) から必ず (H2) を満たすこと

も示されている[35].

なお量子縺れ測度の中には後述する対数ネガティビティのように行列凸関数ではないものも存在する．従って量子縺れ測度の性質 (M3) と (M4) は一般には独立に証明する必要がある．

4.7 ネガティビティと対数ネガティビティ

ここでは混合状態にも適用可能でありながら実際の計算が実行できる場合も多い 2 体系量子縺れ指標を紹介する．最初に扱うのは**ネガティビティ**(negativity) という指標である．この定義には部分転置と正値写像を用いる．まず量子系全体に対する転置操作 T を定義しよう．一般の量子系において量子状態 $\hat{\rho}$ に対する T の操作は，特定の完全正規直交系 $\{|n\rangle\}$ を選択して定義される．まず $\hat{\rho}$ をこの基底で展開する．

$$\hat{\rho} = \sum_{nn'} |n\rangle\langle n|\hat{\rho}|n'\rangle\langle n'|.$$

これを転置した演算子を

$$(\hat{\rho})^T = \sum_{nn'} |n\rangle\langle n'|\hat{\rho}|n\rangle\langle n'| \tag{4.47}$$

で定義する．この T が正値写像になっていることは以下のことを証明すれば確かめられる．

(T1) $(\hat{\rho})^T$ が $\mathrm{Tr}\left[(\hat{\rho})^T\right] = 1$ を満たすエルミート演算子である．
(T2) 任意の純粋状態 $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|(\hat{\rho})^T|\psi\rangle \geq 0$ である．

(T1) は (4.47) 式から自明に示せる．(T2) は第 3 章 3.5 節のように $|\psi\rangle$ に対して

$$|\psi^*\rangle = \sum_n |n\rangle\langle\psi|n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle^*$$

という純粋状態 $|\psi^*\rangle$ を導入すればできる．実際

$$\langle\psi|(\hat{\rho})^T|\psi\rangle = \langle\psi^*|\hat{\rho}|\psi^*\rangle \geq 0$$

が直接計算により示せる．また $(\hat{\rho})^T$ の固有値と $\hat{\rho}$ の固有値は全て一致することも $\hat{\rho}$ のスペクトル分解を用いれば簡単に証明できる．

次に 2 つの量子系 A と B の合成系 AB を考えよう．状態 $\hat{\rho}_{AB}$ の A に対する部分転置とは，A のある完全正規直交系 $\{|n\rangle_A\}$ を 1 つ選択し，A の自由度だけに転置操作を行うことを指す．式で書けば

$$(\hat{\rho}_{AB})^{T_A} = \sum_{nn'} \left((|n\rangle_A\langle n'|_A) \otimes \hat{I}_B\right) \hat{\rho} \left(|n\rangle_A\langle n'|_A \otimes \hat{I}_B\right)$$

となる．量子状態 $\hat{\rho}_{AB}$ の合成系全体に対する転置操作ならば，その操作後も物理的量子状態を表す密度演算子が生成される．しかし A だけを転置する T_A を量子縺れ状態 $\hat{\rho}_{AB}$ に行うと，後述するようにトレースが 1 であっても固有値が負になるエルミート演算子が現れることが起きる．これが部分転置で量子縺れを調べられる本質的な理由である [36]．$(\hat{\rho}_{AB})^{T_A}$ の全ての負の固有値の絶対値の和を，量子縺れ測度のネガティビティ $\Xi[\hat{\rho}_{AB}]$ として定義する．つまり $(\hat{\rho}_{AB})^{T_A}$ のスペクトル分解を

$$(\hat{\rho}_{AB})^{T_A} = \sum_n \lambda_n |\widetilde{n}\rangle_{AB}\langle\widetilde{n}|_{AB}$$

と書くと，$\Xi[\hat{\rho}_{AB}]$ は

$$\Xi[\hat{\rho}_{AB}] = \sum_{\lambda_n<0} |\lambda_n|$$

と定義される．先に述べたように量子状態に全体系の転置操作 T_{AB} を施してもその固有値は変化しない．また

$$(\hat{\rho}_{AB})^{T_B} = \left((\hat{\rho}_{AB})^{T_A}\right)^{T_{AB}}$$

が成り立つために $(\hat{\rho}_{AB})^{T_B}$ の固有値は $(\hat{\rho}_{AB})^{T_A}$ の固有値と一致する．従って部分転置は A と B のどちらに対して作用させても $\Xi[\hat{\rho}_{AB}]$ の値は変わらない．なお

$$\mathrm{Tr}\left[(\hat{\rho}_{AB})^{T_A}\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = 1$$

から負の固有値があっても全ての固有値 λ_n の和は 1 になる．

$$\sum_n \lambda_n = 1.$$

この和を $\lambda_n > 0$ に対する部分和と $\lambda_n > 0$ に対する部分和に分けよう．すると上の規格化条件から

$$\sum_{\lambda_n>0} \lambda_n = 1 + \sum_{\lambda_n<0} |\lambda_n| \tag{4.48}$$

が示される．ここで任意の演算子 $\hat{X}$ に対してトレースノルム (trace norm) を

$$\left\|\hat{X}\right\|_1 = \mathrm{Tr}\left[\sqrt{\hat{X}^\dagger \hat{X}}\right]$$

で定義しよう．(4.48) 式を用いると

$$\left\|(\hat{\rho}_{AB})^{T_A}\right\|_1 = \sum_n |\lambda_n| = \sum_{\lambda_n>0} \lambda_n + \sum_{\lambda_n<0} |\lambda_n| = 2\sum_{\lambda_n<0} |\lambda_n| + 1$$

と計算されることから，$\Xi[\hat{\rho}_{AB}]$ は

$$\Xi[\hat{\rho}_{AB}] = \frac{1}{2}\left(\left\|(\hat{\rho}_{AB})^{T_A}\right\|_1 - 1\right) \tag{4.49}$$

とも書くことができる．もちろん部分転置の対称性から

$$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]=\frac{1}{2}\left(\left\|\left(\hat{\rho}_{AB}\right)^{T_B}\right\|_1-1\right)$$

も成り立っている．定義により $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ の非負性は明らかである．

$$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]\geq 0.$$

また $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ が確率分布 p_n に対して

$$\Xi\left[\sum_n p_n\hat{\rho}_{nAB}\right]\leq\sum_n p_n\Xi\left[\hat{\rho}_{nAB}\right] \tag{4.50}$$

を満たす行列凸関数であることも分かる．この証明はトレースノルムの凸関数性

$$\left\|\sum_n p_n\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right\|_1\leq\sum_n p_n\left\|\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right\|_1 \tag{4.51}$$

を用いればできる．(4.51) 式の証明は付録 D に与えた．従って前節の (H0), (H1), (H2) の条件を $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ が満たせば $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は量子縺れ測度であることが分かる．(H0) に関しては $\left(\hat{\rho}_A\right)^{T_A}$ が量子状態になっていることから $\left\|\left(\hat{\rho}_A\right)^{T_A}\right\|_1=1$ が成り立つため，

$$\begin{aligned}\Xi\left[\hat{\rho}_A\hat{\rho}'_B\right]&=\frac{1}{2}\left(\left\|\left(\hat{\rho}_A\hat{\rho}'_B\right)^{T_A}\right\|_1-1\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|\left(\hat{\rho}_A\right)^{T_A}\hat{\rho}'_B\right\|_1-1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left\|\left(\hat{\rho}_A\right)^{T_A}\right\|_1\left\|\hat{\rho}'_B\right\|_1-1\right)=0\end{aligned}$$

と直接計算で示せる．(H1) も

$$\left(\left(\hat{U}_A\hat{U}'_B\right)\hat{\rho}_{AB}\left(\hat{U}_A^\dagger\hat{U}_B'^\dagger\right)\right)^{T_A}=\left(\hat{U}_A^*\hat{U}'_B\right)\left(\hat{\rho}_{AB}\right)^{T_A}\left(\hat{U}_A^{*\dagger}\hat{U}_B'^\dagger\right)$$

という関係において $\hat{U}_A$ の複素共役演算子 $\hat{U}_A^*$ もユニタリー演算子であって，かつトレースノルムはユニタリー変換に対して不変であることを思い出せば

$$\left\|\left(\hat{U}_A^*\hat{U}'_B\right)\left(\hat{\rho}_{AB}\right)^{T_A}\left(\hat{U}_A^{*\dagger}\hat{U}_B'^\dagger\right)\right\|_1=\left\|\left(\hat{\rho}_{AB}\right)^{T_A}\right\|_1$$

が示される．従って

$$\Xi\left[\left(\hat{U}_A\hat{U}'_B\right)\hat{\rho}_{AB}\left(\hat{U}_A^\dagger\hat{U}_B'^\dagger\right)\right]=\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right] \tag{4.52}$$

が証明される．ネガティビティ $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ にとってこの局所的ユニタリー変換不変性は格別な意味がある．最初に部分転置を定義する際に部分系の 1 つの完全正規直交系 $\{|n\rangle\}$ を選ぶ必要があったが，(4.52) 式の性質により $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は $\{|n\rangle\}$ の選択の仕方に依存しないことが保証されるからである．また (4.45) 式において $\langle m|m'\rangle=\delta_{mm'}$ のために m の異なる $\left(\hat{\rho}_{mA'B}\right)^{T_{A'}}\left(|m\rangle_R\langle m|_R\right)$ 同士は互いに可換であることから

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_m p_m \left(\hat\rho_{mA'B}\right)^{T_{A'}} \left(|m\rangle_R \langle m|_R\right) \right\|_1 \\
&= \sum_m p_m \left\| \left(\hat\rho_{mA'B}\right)^{T_{A'}} \left(|m\rangle_R \langle m|_R\right) \right\|_1 \\
&= \sum_m p_m \left\| \left(\hat\rho_{mA'B}\right)^{T_{A'}} \right\|_1 \left\| |m\rangle_R \langle m|_R \right\|_1 \\
&= \sum_m p_m \left\| \left(\hat\rho_{mA'B}\right)^{T_{A'}} \right\|_1
\end{aligned}
$$

と計算できる．従って (H2) の性質

$$
\Xi\left[\sum_m p_m \hat\rho_{mA'B} |m\rangle_R \langle m|_R\right] = \sum_m p_m \Xi\left[\hat\rho_{mA'B}\right]
$$

も確認できる．従って $\Xi\left[\hat\rho_{AB}\right]$ は量子縺れ測度であることが証明された．このため $\hat\rho_{AB}$ を LOCC で操作した時に確率 p_μ で状態 $\hat\rho(\mu)_{AB}$ が作れる場合の単調性の関係式 (M3)

$$
\Xi\left[\hat\rho_{AB}\right] \geq \sum_\mu p_\mu \Xi\left[\hat\rho(\mu)_{AB}\right] \tag{4.53}
$$

と (M4)

$$
\Xi\left[\hat\rho_{AB}\right] \geq \Xi\left[\sum_\mu p_\mu \hat\rho(\mu)_{AB}\right] \tag{4.54}
$$

の両方が成り立っている．

ネガティビティを少し変形すると相加性のある量子縺れ測度も定義できる．それが以下で定義される対数ネガティビティ (log negativity) である．

$$
\mathcal{L}\left[\hat\rho_{AB}\right] = \ln \left\| \left(\hat\rho_{AB}\right)^{T_A} \right\|_1 .
$$

これはネガティビティと

$$
\mathcal{L}\left[\hat\rho_{AB}\right] = \ln\left(2\Xi\left[\hat\rho_{AB}\right] + 1\right)
$$

という関係にある．A と B が N 個ある A_n と B_n との部分合成系をまとめた系を考えると，トレースノルムは

$$
\left\| \left(\prod_{n=1}^N \hat\rho^{(n)}_{A_n B_n}\right)^{T_A} \right\|_1 = \prod_{n=1}^N \left\| \left(\hat\rho^{(n)}_{A_n B_n}\right)^{T_{A_n}} \right\|_1
$$

という性質を持つことが分かる．このため対数ネガティビティは

$$
\mathcal{L}\left[\prod_{n=1}^N \hat\rho^{(n)}_{A_n B_n}\right] = \sum_{n=1}^N \mathcal{L}\left[\hat\rho^{(n)}_{A_n B_n}\right]
$$

という相加性を示し，量子縺れの定量化として見通しのいい量になっている．残

念ながら $\mathcal{L}[\hat{\rho}_{AB}]$ は行列凸関数ではないため，前節の議論を用いて LOCC での単調性を示すことはできない．ただし (4.39) 式–(4.41) 式の性質 (M0), (M1), (M2) はネガティビティの性質を用いると自明に示せる．対数ネガティビティの (M3) の性質（(4.42) 式）

$$\mathcal{L}[\hat{\rho}_{AB}] \geq \sum_{\mu} p_{\mu} \mathcal{L}[\hat{\rho}(\mu)_{AB}] \tag{4.55}$$

と (M4) の性質（(4.43) 式）

$$\mathcal{L}[\hat{\rho}_{AB}] \geq \mathcal{L}\left[\sum_{\mu} p_{\mu} \hat{\rho}(\mu)_{AB}\right] \tag{4.56}$$

に関しては独立に証明する必要がある．しかし単調増加な凹関数

$$f_{cc}(x) = \ln(2x+1)$$

を定義して

$$\mathcal{L}[\hat{\rho}_{AB}] = f_{cc}(\Xi[\hat{\rho}_{AB}])$$

という関係に気付けば証明は難しくない[37]．(4.53) 式と f_{cc} の凹性から

$$f_{cc}(\Xi[\hat{\rho}_{AB}]) \geq f_{cc}\left(\sum_{\mu} p_{\mu} \Xi[\hat{\rho}(\mu)_{AB}]\right) \geq \sum_{\mu} p_{\mu} f_{cc}(\Xi[\hat{\rho}(\mu)_{AB}])$$

となり，(4.55) 式が示される．また (4.54) 式と f_{cc} の単調増加性から (4.56) 式が示される．

以下では 2 量子ビット系の簡単な例でネガティビティと対数ネガティビティを実際に計算してみよう．$\hat{\sigma}_3|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ とした時に，$p_+ + p_- = 1$ を満たす 2 値確率分布 $p_\pm$ によって定まる

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{p_+}|+\rangle_A|+\rangle_B + \sqrt{p_-}|-\rangle_A|-\rangle_B$$

という純粋状態を考えよう．対応する密度演算子は

$$\hat{\rho}_{AB} = \begin{bmatrix} \rho_{++,++} & \rho_{++,--} & \rho_{++,+-} & \rho_{++,-+} \\ \rho_{--,++} & \rho_{--,--} & \rho_{--,+-} & \rho_{--,-+} \\ \rho_{+-,++} & \rho_{+-,--} & \rho_{+-,+-} & \rho_{+-,-+} \\ \rho_{-+,++} & \rho_{-+,--} & \rho_{-+,+-} & \rho_{-+,-+} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p_+ & \sqrt{p_+p_-} & 0 & 0 \\ \sqrt{p_+p_-} & p_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書ける．A に関して部分転置をとった $(\hat{\rho}_{AB})^{T_A}$ は

$$(\hat{\rho}_{AB})^{T_A} = \begin{bmatrix} \rho_{++,++} & \rho_{-+,+-} & \rho_{++,+-} & \rho_{-+,++} \\ \rho_{+-,-+} & \rho_{--,--} & \rho_{+-,--} & \rho_{--,-+} \\ \rho_{+-,++} & \rho_{--,+-} & \rho_{+-,+-} & \rho_{--,++} \\ \rho_{++,-+} & \rho_{-+,--} & \rho_{++,--} & \rho_{-+,-+} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{p_+p_-} \\ 0 & 0 & \sqrt{p_+p_-} & 0 \end{bmatrix}$$

となる．この固有値は，$p_\pm$ と $\pm\sqrt{p_+p_-}$ の 4 つである．このうち負になり得るのは $-\sqrt{p_+p_-}$ だけである．従ってネガティビティ $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は

$$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = \sqrt{p_+p_-}$$

と計算される．最大値は $p_+ = p_- = 1/2$ の時に達成され，$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = 1/2$ の値をとる．対数ネガティビティ $\pounds\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は

$$\pounds\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = \ln\left(2\sqrt{p_+p_-} + 1\right)$$

と計算され，最大値は $\ln 2$ である．A と B が N 準位系である時，確率分布 p_n を用いて

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{p_n}|n\rangle_A|n\rangle_B$$

と書かれる純粋状態の場合は同様に

$$\Xi\left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right] = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{p_n}\right)^2 - 1\right),$$
$$\pounds\left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right] = 2\ln\left(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{p_n}\right)$$

と計算される．なお $\pounds\left[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right]$ は $S\left(|\Psi\rangle_{AB}\right) = -\sum_n p_n \ln p_n$ の上限になっている．これは対数関数の凸性:$\sum p_n \ln a_n \le \ln\left(\sum p_n a_n\right)$ において $a_n = 1/\sqrt{p_n}$ とおいた関係を用いるとすぐに証明できる．

次に混合状態の場合の例を計算してみよう．

$$|\Psi_0\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A|-\rangle_B - |-\rangle_A|+\rangle_B\right)$$

という最大量子縺れ状態 $|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB}$ と最大エントロピー状態 $\hat{I}_{AB}/4$ の混合状態

$$\hat{\rho}_{AB} = q|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB} + (1-q)\frac{\hat{I}_{AB}}{4} \tag{4.57}$$

を考える．q は $0 \le q \le 1$ の間の値をとる実数である．$\hat{I}_{AB}/4$ は $\left(\hat{I}_A/2\right) \otimes \left(\hat{I}_B/2\right)$ と書ける分解可能状態であり，量子縺れを持たない．$\hat{\sigma}_3|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ の基底で行列表示をすると

$$\hat{\rho}_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{1-q}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+q}{4} & -\frac{q}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{q}{2} & \frac{1+q}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-q}{4} \end{bmatrix}$$

と書かれる．これから部分転置された状態は

$$\left(\hat{\rho}_{AB}\right)^{T_A} = \begin{bmatrix} \frac{1-q}{4} & 0 & 0 & -\frac{q}{2} \\ 0 & \frac{1+q}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+q}{4} & 0 \\ -\frac{q}{2} & 0 & 0 & \frac{1-q}{4} \end{bmatrix}$$

となる．この固有値は 3 つの $(1+q)/4$ と 1 つの $(1-3q)/4$ である．このうち負になるのは $q > 1/3$ の時の $(1-3q)/4$ だけである．従って，$0 \le q \le 1/3$ の時はネガティビティ $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は 0 であり，$q > 1/3$ の時は $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = (3q-1)/4$ となる．ヘヴィサイドの階段関数 $\Theta(x)$ を用いてまとめると

$$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = \frac{3}{4}\left(q - \frac{1}{3}\right)\Theta\left(q - \frac{1}{3}\right)$$

という結果を得る．最大値はもちろん最大量子縺れ状態になる $q=1$ の時に達成され，先の例の結果と同じ 1/2 の値をとる．対数ネガティビティは

$$\mathcal{L}\left[\hat{\rho}_{AB}\right] = \ln\left(\frac{3}{2}\left(q - \frac{1}{3}\right)\Theta\left(q - \frac{1}{3}\right) + 1\right)$$

と計算される．ここで注目すべきは $0 \le q \le 1/3$ の領域である．ネガティビティも対数ネガティビティも 0 になり，(4.57) 式の状態には量子縺れが存在しないことを示している．しかしこの状態は $q > 0$ の確率で最大量子縺れ状態 $|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB}$ を確かに混合している．量子縺れが厳密に零であるのはなぜであろうか．実は $0 \le q \le 1/3$ の時の (4.57) 式の $\hat{\rho}_{AB}$ は純粋状態 $|u\rangle_A\langle u|_A \otimes |v\rangle_A\langle v|_B$ から LOCC によって生成できることが直接示せる．$SU(2)$ 群のハール測度 $d\mu(x)$ に対してランダムに選んだ x に対応する同じ元 $\hat{U}(x)$ を状態 $\hat{\varrho}_{AB}$ にある A と B の両方に作用させて平均化された状態を作る TPCP 写像 $\Gamma^{(dp)}$ を考えよう．

$$\Gamma^{(dp)}\left[\hat{\varrho}_{AB}\right] = \int \left(\hat{U}(x)_A \hat{U}(x)_B\right)\hat{\varrho}_{AB}\left(\hat{U}(x)_A^\dagger \hat{U}(x)_B^\dagger\right) d\mu(x) \qquad (4.58)$$

ここで x をオイラー角度 (α, β, γ) で表示することにすると，積分区間は $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le \pi$, $0 \le \gamma \le 2\pi$ となり，群の元は

$$\hat{U}(x) = \begin{bmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

と座標が張られ，また積分測度は

$$d\mu(x) = \frac{1}{8\pi^2}\sin\beta d\alpha d\beta d\gamma$$

となる．$\Gamma^{(dp)}$ が LOCC の 1 つを記述していることは重要である．例えば A の領域でランダムに x を生成させてその結果を B の領域に古典通信で伝える．この x の共有により同じ $\hat{U}(x)$ を A と B に作用させることが可能となる．これを繰り返して状態を平均化すると $\hat{\varrho}_{AB}$ から $\Gamma^{(dp)}[\hat{\varrho}_{AB}]$ が生成される．つまりこの過程で量子縺れは増加しないことが保証されている．この LOCC 写像の $\Gamma^{(dp)}$ の特徴はスピン一重項状態 $|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB}$ と最大エントロピー状態 $\hat{I}_{AB}/4$ を $SU(2)$ 群の性質により変化させないことである．

$$\Gamma^{(dp)}[|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB}] = |\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB}, \qquad \Gamma^{(dp)}\left[\frac{1}{4}\hat{I}_{AB}\right] = \frac{1}{4}\hat{I}_{AB}.$$

また任意の状態 $\hat{\varrho}_{AB}$ は

$$\Gamma^{(dp)}[\hat{\varrho}_{AB}] = \frac{4p-1}{3}|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB} + \frac{4(1-p)}{3}\frac{1}{4}\hat{I}_{AB} \tag{4.59}$$

という形の状態に写像される．ここで p は

$$p = \langle\Psi_0|_{AB}\hat{\varrho}_{AB}|\Psi_0\rangle_{AB}$$

で与えられる $0 \le p \le 1$ の値をとる実数である．ちなみに $p = 0$ の時に $\Gamma^{(dp)}[\hat{\varrho}_{AB}]$ はスピン 3 重項の部分ヒルベルト空間への射影演算子に比例する量子状態になっている．$\hat{\varrho}_{AB}$ の状態にある合成系 AB に対して，$|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB}$ であるかその直交状態であるかを調べる理想測定での $|\Psi_0\rangle_{AB}\langle\Psi_0|_{AB}$ の観測確率という意味も p にはある．ここで

$$q = \frac{1}{3}(4p-1) \tag{4.60}$$

と置けば $\Gamma^{(dp)}[\hat{\varrho}_{AB}]$ は (4.57) 式の状態に一致する．今，

$$|u\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle, \qquad |v\rangle = d_+|+\rangle + d_-|-\rangle,$$

という純粋状態の直積状態

$$\hat{\varrho}_{AB} = |u\rangle_A\langle u|_A \otimes |v\rangle_A\langle v|_B$$

を考えて $\Gamma^{(dp)}$ で変化させてみよう．すると

$$p = \langle\Psi_0|_{AB}(|u\rangle_A\langle u|_A \otimes |v\rangle_A\langle v|_B)|\Psi_0\rangle_{AB} = \frac{1}{2}|c_+d_- - c_-d_+|^2$$

という値に対する (4.59) 式の状態 $\hat{\rho}_{AB}$ を得る．$c_\pm, d_\pm$ を変化させた場合の p の最大値は

$$p_{\max} = \frac{1}{2}$$

となることも確認できる．従って (4.60) 式の関係から q の最大値は

$$q_{\max} = \frac{1}{3}$$

となることが分かる．このように混合状態の場合には見かけだけで量子縺れの有無を判断することはできない．今の例でも $0 \le q \le 1/3$ の値をとる $\hat{\rho}_{AB}$ は実は分離可能状態であり，量子縺れは存在しない．この事実をネガティビティ $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ と対数ネガティビティ $\pounds\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ は正確に教えてくれていたのである．

次に有限温度のギブス状態の例を挙げよう．A と B からなる 2 体系 AB を考えると，そのハミルトニアン $\hat{H}_{AB}$ に対して

$$\hat{\rho}_{AB}(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp\left(-\beta \hat{H}_{AB}\right)$$

がギブス状態である．$\hat{H}_{AB}$ は一般に A の局所的演算子 $\hat{O}_{nA}$ と B の局所的演算子 $\hat{O}'_{nB}$ の積の和に分解できる．

$$\hat{H}_{AB} = \sum_n \hat{O}_{nA} \hat{O}'_{nB}.$$

$\hat{\rho}_{AB}(\beta)$ の量子縺れを評価する時には $\left(\hat{\rho}_{AB}(\beta)\right)^{T_A}$ が物理的状態であるかないかが重要である．しかし例えば $\left(\hat{\rho}_{AB}(\beta)\right)^{T_A}$ が $\exp\left(-\beta \hat{H}_{AB}^{T_A}\right)$ に比例すればこれもギブス状態であり，$\hat{\rho}_{AB}(\beta)$ には量子縺れがないことになる．しかし一般にはこの関係は成り立たない．例えば $\exp\left(-\beta \hat{H}_{AB}\right)$ の展開には

$$\hat{O} = \left(\sum_n \hat{O}_{nA} \hat{O}'_{nB}\right)^2 = \sum_{nm} \left(\hat{O}_{nA} \hat{O}'_{nB}\right) \left(\hat{O}_{mA} \hat{O}'_{mB}\right)$$

という形の項が現れる．この部分転置は

$$\hat{O}^{T_A} = \sum_{nm} \left(\hat{O}_{mA}^{T_A} \hat{O}'_{nB}\right) \left(\hat{O}_{nA}^{T_A} \hat{O}'_{mB}\right)$$

となるため，$\left[\hat{O}_{nA}, \hat{O}_{mA}\right] = 0$ や $\left[\hat{O}'_{nB}, \hat{O}'_{mB}\right] = 0$ 等の特殊な条件がない限り，演算子多項式の 2 乗の形に戻れない．

$$\hat{O}^{T_A} \neq \left(\sum_n \hat{O}''_{nA} \hat{O}'_{nB}\right)^2.$$

このため $\left(\hat{\rho}_{AB}(\beta)\right)^{T_A}$ は一般には $\exp\left(-\beta \hat{H}_{AB}^{T_A}\right)$ に比例しない．そのためギブス状態でも量子縺れが現れる例がある．具体的にギブス状態の量子縺れが計算できる例として，2 量子ビット系のハミルトニアンが以下のように与えられる場合を考えよう [38]．

$$\hat{H} = \hat{\sigma}_{3A} \otimes \hat{I}_B + \hat{I}_A \otimes \hat{\sigma}_{3B} + 2\kappa \hat{\sigma}_{1A} \otimes \hat{\sigma}_{1B} + 2\sqrt{\kappa^2 + 1}$$

ここで κ を負ではない実数とする．直接計算により $\left(\hat{\rho}_{AB}(\beta)\right)^{T_A}$ の固有値を具

体的に求めることができるが，そのうちの 3 つは常に正であることが分かる．残りの 1 つだけは β を低温領域の $\beta = \infty$ から小さくしていくと途中まで負でとなり，量子縺れの存在を示す．ネガティビティはこの低温領域において

$$\Xi[\hat{\rho}_{AB}] = \frac{\exp(-2\beta\sqrt{\kappa^2+1})}{Z(\beta)}\left(\sqrt{\kappa^2+1}\cosh(2\beta\kappa) - \kappa\sinh\left(2\beta\sqrt{\kappa^2+1}\right)\right)$$

と計算される．しかし κ に対して

$$\sqrt{\kappa^2+1}\cosh(2\beta_c\kappa) = \kappa\sinh\left(2\beta_c\sqrt{\kappa^2+1}\right)$$

で定義される閾値 β_c を境に，$\beta < \beta_c$ の高温領域では $\Xi[\hat{\rho}_{AB}] = 0$ となって完全に量子縺れは失われる．従ってこの高温領域のギブス状態 $\hat{\rho}_{AB}(\beta)$ は分解可能状態になる例を与えている．

ネガティビティは量子縺れエントロピーと異なり，混合状態の量子縺れを計算できる測度である．このメリットは純粋状態にある多体系の 2 つの部分系の間の量子縺れ計算でも発揮される．全体系が量子的に縺れている純粋状態でも，その 2 体部分系の縮約状態は一般に混合状態になるためである．例えば 3 量子ビット系の

$$|GHZ\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 + |-\rangle_1|-\rangle_2|-\rangle_3\right),$$
$$|W\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 + |+\rangle_1|-\rangle_2|+\rangle_3 + |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3\right)$$

に対して，部分系 1 と部分系 2 の間の量子縺れを測ることがネガティビティではできる．実際それぞれの縮約状態は

$$\hat{\rho}_{GHZ} = \mathop{\mathrm{Tr}}_3\left[|GHZ\rangle_{123}\langle GHZ|_{123}\right] = \frac{1}{2}\left(|++\rangle\langle++| + |--\rangle\langle--|\right),$$
$$\hat{\rho}_W = \mathop{\mathrm{Tr}}_3\left[|W\rangle_{123}\langle W|_{123}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[|++\rangle\langle++| + \left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)\left(\langle+-| + \langle-+|\right)\right]$$

となるため，

$$\Xi[\hat{\rho}_{GHZ}] = 0, \qquad \Xi[\hat{\rho}_W] = \frac{1}{6}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

という結果を得る．従って GHZ 状態では 2 体部分系の間に量子縺れは存在しないが，W 状態には存在することが確認できる．

4.8 ガウス量子状態に対するネガティビティ

ここでは 2 つの調和振動子で構成される無限次元系の量子縺れを議論する．特にガウス状態に対する対数ネガティビティの有用な公式[37] を紹介する．準備として 1 つの調和振動子系から始める．無次元化した位置と運動量の演算子

$\hat{q}, \hat{p}$ を考えよう．

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{bmatrix}$$

によって消滅演算子 $\hat{a}$ と生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ が定義される．$[\hat{q}, \hat{p}] = i$ という交換関係から $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ が成り立つ．基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ で定義され，第 n 励起状態は

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle$$

と計算される．この系のヒルベルト空間は $\{|n\rangle : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ で張られる．この基底系を用いて演算子 $\hat{O}$ に関する転置操作 T を定義できる．$\hat{O}$ を

$$\hat{O} = \sum_{n,n'} |n\rangle\langle n|\hat{O}|n'\rangle\langle n'|$$

と展開した時に転置演算子 $\hat{O}^T$ は

$$\hat{O}^T = \sum_{n,n'} |n\rangle\langle n'|\hat{O}|n\rangle\langle n'|$$

で定義される．任意の 2 つの演算子 $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ に対しては

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{O}_1 \hat{O}_2^T\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{O}_1^T \hat{O}_2\right]$$

という推移則が成り立っている．また $\hat{q}, \hat{p}$ はこの基底系で

$$\hat{q} = \sum_{n=0} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \left(|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|\right),$$

$$\hat{p} = i \sum_{n=0} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \left(|n+1\rangle\langle n| - |n\rangle\langle n+1|\right)$$

と書けるため，転置に対して位置座標は変化しないが，運動量はその符号を変える．

$$\hat{q}^T = \hat{q}, \qquad \hat{p}^T = -\hat{p}.$$

従ってこの転置操作は系の時間反転操作と対応していることも分かる．先に述べたように転置操作は正値写像である．従って量子状態 $\hat{\rho}$ を転置して得られる $\hat{\rho}^T$ も量子状態である．

次に $(\hat{q}, \hat{p})$ を別な正準演算子対 $(\hat{q}', \hat{p}')$ に線形的に正準変換することを考えよう．2 次元正方実行列 S を用いてこの変換を

$$\begin{bmatrix} \hat{q}' \\ \hat{p}' \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{bmatrix}$$

と書こう．新しい座標 $\hat{q}', \hat{p}'$ が $[\hat{q}', \hat{p}'] = i$ を満たすためには

$$S\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} S^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

という関係が要求される．(4.61) 式を満たす行列 S は群をなすが，その元のうち単位行列 I に連続的につながる S は 3 つの実変数 u, v, w を用いて

$$S = \begin{bmatrix} e^u \cosh w & e^v \sinh w \\ e^{-v} \sinh w & e^{-u} \cosh w \end{bmatrix}$$

と書けることが知られている．この元は

$$\det S = 1$$

を満たす一般の行列であるため，この連続群は $SL(2, R)$ である．なお転置行列 S^T や逆行列 S^{-1} も $SL(2, R)$ の元になっている．この $SL(2, R)$ には調和振動子のヒルベルト空間に作用するユニタリー演算子の表現が存在し，その生成子は $\hat{q}^2, \hat{p}^2, \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}$ の 3 つである．つまり u, v, w に依存する 3 つの実変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ が存在して

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_S \hat{q} \hat{U}_S^\dagger \\ \hat{U}_S \hat{p} \hat{U}_S^\dagger \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{bmatrix}$$

を満たす

$$\hat{U}_S = \exp\left[\frac{i}{2}\left(\theta_1 \hat{q}^2 + \theta_2 \hat{p}^2 + \theta_3 \left(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}\right)\right)\right]$$

という $SL(2, R)$ のユニタリー表現が存在する．

次に A, B という 2 つの調和振動子からなる系 AB を考える．$X = A, B$ として各正準座標演算子は

$$[\hat{q}_X, \hat{q}_{X'}] = 0, \qquad [\hat{q}_X, \hat{p}_{X'}] = i\delta_{XX'}, \qquad [\hat{p}_X, \hat{p}_{X'}] = 0$$

という交換関係を満たしている．1 つの調和振動子系と同様に

$$\hat{a}_X = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q}_X + i\hat{p}_X\right), \qquad \hat{a}_X^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q}_X - i\hat{p}_X\right)$$

という消滅生成演算子で定義される励起子数の固有状態

$$|nn'\rangle_{AB} = |n\rangle_A |n'\rangle_B$$

を考えよう．任意の演算子 $\hat{O}_{AB}$ をこの基底を用いて

$$\hat{O}_{AB} = \sum_{n_A n_B n'_A n'_B} |n_A n_B\rangle\langle n_A n_B|\hat{O}_{AB}|n'_A n'_B\rangle\langle n'_A n'_B|$$

と展開した時，A に関する部分転置操作 T_A を

$$\hat{O}_{AB}^{T_A} = \sum_{n_A n_B n'_A n'_B} |n_A n_B\rangle\langle n'_A n_B|\hat{O}_{AB}|n_A n'_B\rangle\langle n'_A n'_B|$$

で定義しよう．B に関しても同様に部分転置操作が定義できる．T_A に対して各正準座標演算子は

$$\hat{q}_A^{T_A} = \hat{q}_A, \quad \hat{p}_A^{T_A} = -\hat{p}_A, \quad \hat{q}_B^{T_A} = \hat{q}_B, \quad \hat{p}_B^{T_A} = \hat{p}_B$$

と変換される．これは A だけを時間反転操作を行うことに対応している．最初に具体的な量子縺れ純粋状態

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{1-|g|^2}\exp\left(g\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\right)|0\rangle_A|0\rangle_B = \sqrt{1-|g|^2}\sum_{n=0}^{\infty} g^n|n\rangle_A|n\rangle_B \tag{4.62}$$

でネガティビティ $\Xi[\hat{\rho}_{AB}]$ を計算してみよう．ここで g は $|g|<1$ を満たす複素数パラメータである．この状態に対する部分転置演算子は

$$\hat{\rho}_{AB}^{T_A} = \left(|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}\right)^{T_A} = \left(1-|g|^2\right)\sum_{n\bar{n}} g^n g^{*\bar{n}}\left(|\bar{n}\rangle_A\langle n|_A \otimes |n\rangle_B\langle\bar{n}|_B\right)$$

と計算されるため，$\left(\hat{\rho}_{AB}^{T_A}\right)^\dagger \hat{\rho}_{AB}^{T_A}$ という演算子の積はこの基底系で対角化されている．このことから簡単にトレースノルムが計算できて

$$\Xi[\hat{\rho}_{AB}] = \frac{1}{2}\left(\left\|\hat{\rho}_{AB}^{T_A}\right\|_1 - 1\right) = \frac{|g|^2}{2\left(1-|g|^2\right)}$$

という結果を得る．(4.62) 式の状態は第 6 章のウンルー効果や第 7 章のブラックホールの議論で重要となる．

調和振動子は無限次元系であるため，一般の量子状態に対して $\Xi[\hat{\rho}_{AB}]$ や対数ネガティビティ $\mathcal{L}[\hat{\rho}_{AB}] = \ln(2\Xi[\hat{\rho}_{AB}]+1)$ を計算することは難しい．しかしガウス状態に限れば一般の場合でも利用できる便利な公式が存在し，3 つの 2 次元行列と 1 つの 4 次元行列の行列式を計算するだけで $\Xi[\hat{\rho}_{AB}]$ を得ることができる．以下でそれを説明しよう．まずガウス状態を特性関数

$$\chi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{AB}\exp\left(i\left(x_1\hat{q}_A + x_2\hat{p}_A + x_3\hat{q}_B + x_4\hat{p}_B\right)\right)\right] \tag{4.63}$$

を用いて定義しよう．$\chi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ は多点相関関数の生成母関数である．ガウス状態では $\chi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ の 1 階微分の原点での値が消える．ここで演算子 $\hat{O}$ の状態 $\hat{\rho}_{AB}$ での期待値を

$$\left\langle\hat{O}\right\rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{O}\hat{\rho}_{AB}\right]$$

と表すと，この条件は 1 点関数が全て消えることを意味している．もし $\langle\hat{q}_X\rangle = \langle\hat{p}_X\rangle = 0$ が成り立たなくとも，コヒーレント状態を作る局所的ユニタリー変換を状態に作用させて $\langle\hat{q}_X\rangle = \langle\hat{p}_X\rangle = 0$ を常に実現できる．局所的ユニタリー変換は量子縺れに影響を与えないため，一般性を失わずに常に 1 点関数は零であ

るとしてよい．1 点関数が消える場合，原点での 2 階微分項にマイナスをかけた値 $-\partial_\mu \partial_\nu \chi(0,0,0,0)$ を成分とする実対称行列 M は共分散行列 (covariance matrix) と呼ばれる．正準座標演算子を用いると M は

$$M = \begin{bmatrix} \langle \hat{q}_A^2 \rangle & \frac{1}{2}\langle \hat{p}_A \hat{q}_A + \hat{q}_A \hat{p}_A \rangle & \langle \hat{q}_A \hat{q}_B \rangle & \langle \hat{q}_A \hat{p}_B \rangle \\ \frac{1}{2}\langle \hat{p}_A \hat{q}_A + \hat{q}_A \hat{p}_A \rangle & \langle \hat{p}_A^2 \rangle & \langle \hat{p}_A \hat{q}_B \rangle & \langle \hat{p}_A \hat{p}_B \rangle \\ \langle \hat{q}_B \hat{q}_A \rangle & \langle \hat{q}_B \hat{p}_A \rangle & \langle \hat{q}_B^2 \rangle & \frac{1}{2}\langle \hat{p}_B \hat{q}_B + \hat{q}_B \hat{p}_B \rangle \\ \langle \hat{p}_B \hat{q}_A \rangle & \langle \hat{p}_B \hat{p}_A \rangle & \frac{1}{2}\langle \hat{p}_B \hat{q}_B + \hat{q}_B \hat{p}_B \rangle & \langle \hat{p}_B^2 \rangle \end{bmatrix}$$

と書ける．またこれを 2 次元正方行列でブロック化して

$$M = \begin{bmatrix} M_A & M_C \\ M_C^T & M_B \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

という表示も用いる．量子状態 $\hat{\rho}_{AB}$ と任意の 4 次元実数ベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ に対して

$$\vec{x}^T M \vec{x} = \mathrm{Tr}\left[(x_1 \hat{q}_A + x_2 \hat{p}_A + x_3 \hat{q}_B + x_4 \hat{p}_B)^2 \hat{\rho}_{AB}\right] \geq 0$$

が成り立つため，M は非負行列である ($M \geq 0$)．ガウス状態はこの M を用いて特性関数が

$$\chi(x_1, x_2, x_3, x_4) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} x_\mu M_{\mu\nu} x_\nu\right)$$

というガウス関数に書ける状態であると定義される．また特定の位置演算子 $\hat{q}_A, \hat{q}_B$ の固有状態を基底とした場合のガウス状態の行列成分もガウス関数になる特徴を持っている．

$$\langle q_1 q_2|_{AB} \hat{\rho}_{AB} |q_3 q_4\rangle_{AB} \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} q_\mu \Delta_{\mu\nu} q_\nu\right).$$

正準座標演算子 $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{q}_A & \hat{p}_A & \hat{q}_B & \hat{p}_B \end{bmatrix}^T$ に対して正準交換関係を用いると

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{X}\hat{X}^T \hat{\rho}_{AB}\right] = M + \frac{i}{2}J$$

という関係を得る.（この T は横ベクトルを縦ベクトルにする意味の転置記号である.）ここで J は

$$J = -i\left[\hat{X}, \hat{X}^T\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

で定義される実反対称行列である．任意の複素ベクトル $\vec{u} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}^T$ を用いて

$$\hat{\eta} = \hat{X}^T \vec{u} \tag{4.66}$$

という演算子を定義すると，常に $\hat{\eta}^\dagger \hat{\eta}$ は非負演算子であるために

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{\eta}^\dagger \hat{\eta} \hat{\rho}_{AB}\right] = \vec{u}^\dagger \left(M + \frac{i}{2}J\right) \vec{u} \geq 0$$

が成り立つ．従って

$$M + \frac{i}{2}J \geq 0 \tag{4.67}$$

という関係が一般的に示される．M の非負性は調和振動子の古典力学でも成り立つ性質だったが，(4.67) 式の関係は不確定性関係の表現の 1 つになっており，量子力学固有の性質である．

付録 E で示されているように (4.64) 式の共分散行列を持つガウス状態のネガティビティは

$$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}(\beta)\right] = \max\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\left(\tilde{\Delta}(M) - \sqrt{\tilde{\Delta}(M)^2 - 4\det M}\right)}} - 1\right), 0\right] \tag{4.68}$$

という公式によって計算することができる．ここで $\tilde{\Delta}(M)$ は

$$\tilde{\Delta}(M) = \det M_A + \det M_B - 2\det M_C \tag{4.69}$$

で与えられる．従ってガウス状態 $\hat{\rho}_{AB}$ からまず共分散行列 M を求め，行列式 $\det M$ と (4.69) 式で定義された $\tilde{\Delta}(M)$ を計算して (4.68) 式に代入すれば，ネガティビティ $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}(\beta)\right]$ が求められる．この公式は場の理論にも適用でき，大変有用である．

具体例として連結調和振動子のギブス状態で $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$ を (4.68) 式から計算してみよう．$\omega^2 \geq g \geq 0$ を満たす結合定数を持つ

$$\hat{H}_{AB} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}_A^2 + \hat{p}_B^2\right) + \frac{1}{2}\omega^2\left(\hat{q}_A^2 + \hat{q}_B^2\right) + g\hat{q}_A\hat{q}_B$$

というハミルトニアンを持つ系を考えよう．そしてギブス状態

$$\hat{\rho}_{AB}(\beta) \propto \exp\left(-\beta \hat{H}_{AB}\right)$$

を考える．座標の回転操作を行うことで $\omega_\pm = \sqrt{\omega^2 \pm g}$ で決まる角周波数を持つ 2 つの自由調和振動子系として $\hat{H}_{AB}$ は対角化される．そのため簡単に $\tilde{\nu}_-$ を求めることが可能となり，

$$\tilde{\nu}_{-} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\frac{\omega^2 - g}{\omega^2 + g}}\coth\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\omega^2 + g}\right)\coth\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\omega^2 - g}\right)}$$

という結果を得る．このギブス状態では低温領域 ($\beta \sim \infty$) で

$$\tilde{\nu}_{-} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2 - g}{\omega^2 + g}\right)^{1/4} \le \frac{1}{2}$$

となるため，量子縺れが存在している．一方，高温領域 ($\beta \sim 0$) では

$$\tilde{\nu}_{-} = \frac{1}{\beta\sqrt{\omega^2 + g}} \sim \infty$$

と振る舞うために量子縺れは存在しない．この系には

$$\tanh\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + g}}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - g}}{2T_c}\right) = \sqrt{\frac{\omega^2 - g}{\omega^2 + g}}$$

の解として定義される転移温度 T_c が存在する．$0 \le T < T_c$ の低温領域でギブス状態は

$$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}(\beta)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\omega^2 + g}{\omega^2 - g}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\tanh\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + g}}{2T}\right)\tanh\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - g}}{2T}\right)} - 1\right]$$

という値の量子縺れを持つ．しかし $T \ge T_c$ の高温領域では量子縺れは完全に消滅し，ギブス状態は分解可能状態になっていることが分かる．

4.9 量子テレポーテーション

この章では量子縺れをリソースとして実現される量子テレポーテーション (quantum teleportation) のプロトコル [40] を紹介しよう．簡単のために量子ビット系で議論する．スピン一重項状態

$$|Bell_0\rangle_{A'B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{A'}|+\rangle_B + |-\rangle_{A'}|-\rangle_B\right)$$

にある量子ビット A' と B を考える．アリスが A' を保持し，空間的に離れたボブが B を保持している．更にアリスは量子状態 $\hat{\rho}_A$ にあるもう 1 つの量子ビット A を手元にもっている．アリスもボブも $\hat{\rho}_A$ がどのような状態かは知らないとする．この時アリスとボブは量子縺れを使うことで LOCC により $\hat{\rho}_A$ をボブの B に転送することができる．アリスは最初手元の合成系 AA' に対して (4.16)–(4.19) 式のどのベル状態にあるかを調べる理想測定を行う．この測定演算子は

$$\hat{M}_{\mu AA'} = |Bell_\mu\rangle_{AA'}\langle Bell_\mu|_{AA'}$$

で与えられる．全体として $\hat{\rho}_A|Bell_0\rangle_{A'B}\langle Bell_0|_{A'B}$ という量子状態にある $A\,A'$

に対してアリスはこの測定を実行する．そして得られた測定結果 μ をボブに古典通信で知らせ，ボブはその μ に依存した局所的ユニタリー変換

$$\hat{U}_{\mu B} = \hat{\sigma}_{\mu B}^{-1}$$

を手元の B に施す．A と A' に対しての部分トレースをとって B の縮約状態を求めることにより以下の TPCP 写像 $\Gamma^{(QT)}$ が定義される．

$$\Gamma^{(QT)}\left[\hat{\rho}_A\right] = \sum_{\mu=0}^{3} \operatorname*{Tr}_{AA'}\left[\hat{U}_{\mu B}\hat{M}_{\mu AA'}\left(\hat{\rho}_A|Bell_0\rangle_{A'B}\langle Bell_0|_{A'B}\right)\hat{M}_{\mu AA'}^{\dagger}\hat{U}_{\mu B}^{\dagger}\right]$$

を得る．この $\Gamma^{(QT)}$ は A の任意の純粋状態 $\hat{\rho}_A = |\psi\rangle_A\langle\psi|_A$ に対して

$$\Gamma^{(QT)}\left[|\psi\rangle_A\langle\psi|_A\right] = |\psi\rangle_B\langle\psi|_B \tag{4.70}$$

を満たすことが

$$|\psi\rangle_A|Bell_0\rangle_{A'B} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}|Bell_\mu\rangle_{AA'}\hat{\sigma}_{\mu B}^{-1}|\psi\rangle_B$$

という恒等式から証明できる．これを用いるとアリスからみた量子状態は

$$\sum_{\mu=0}^{3}\hat{U}_{\mu B}\hat{M}_{\mu AA'}\left(|\psi\rangle_A|Bell_0\rangle_{A'B}\langle\psi|_A\langle Bell_0|_{A'B}\right)\hat{M}_{\mu AA'}^{\dagger}\hat{U}_{\mu B}^{\dagger}$$
$$= \frac{1}{4}\hat{I}_{AA'}\otimes|\psi\rangle_B\langle\psi|_B$$

となることが導かれ，この両辺で AA' の部分トレースをとれば (4.70) 式が得られる．更に (4.70) 式から任意の混合状態 $\hat{\rho}$ も A から B に転送されることが分かる．

$$\Gamma^{(QT)}\left[\hat{\rho}_A\right] = \hat{\rho}_B.$$

このテレポーテーションの過程で操作後の AA' の状態は最大混合状態 $\hat{I}_{AA'}/4$ となっており，$\hat{\rho}$ の情報は全く残らない．つまり $\hat{\rho}$ の量子情報が漏れなく A から B に転送されたと言える．この転送には古典通信での結果の伝達があるため，光速度を超えて状態転送は実現できない．従ってこのプロトコルは因果律を破らない．図 4.1 は $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ の場合に時空におけるテレポーテーションの因果関係を表している．図中では時刻 $t = t_A$ に測定を行い，その測定結果を光速でボブに送り，$t = t_B$ にボブはその情報を受け取って，それに依存するユニタリー操作 $\hat{\sigma}_{\mu B}^{-1}$ を行っている．始状態 $\hat{\rho}_A|Bell_0\rangle_{A'B}\langle Bell_0|_{A'B}$ において B の縮約状態は $\hat{I}_B/2$ であり，B はもともと $\hat{\rho}$ の情報を全く持っていなかった．しかし $\hat{M}_{\mu AA'}$ に対応する測定直後に B の状態は確率 1/4 で各々の結果 μ に対応した $\hat{\sigma}_\mu\hat{\rho}\hat{\sigma}_\mu^\dagger$ となり，$\hat{\rho}$ の依存性を持つようになる．従って測定結果を知ったアリスにとっては B の量子状態は瞬間に $\hat{\rho}$ に依存するようになる．つまり

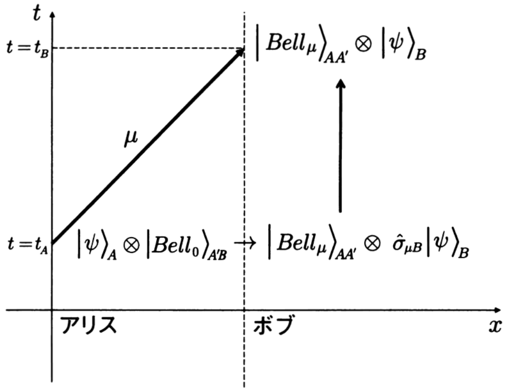


図 4.1 量子テレポーテーションの時空上での因果律を表す概念図．測定結果の古典通信速度が光速を超えないため因果律は破れない．

$\hat{\rho}$ の情報を B は瞬間に獲得するようにアリスには見えるのである．そしてボブに μ の情報が届いた後にボブが $\hat{U}_{\mu B}$ でこの $\hat{\sigma}_\mu \hat{\rho} \hat{\sigma}_\mu^\dagger$ を正しい $\hat{\rho}$ に修正しているだけのように見えるのだ．このためこのプロトコルは量子テレポーテーションと呼ばれている．

ここで再び量子状態の測定者依存性を確認することもできる．ボブがアリスからの情報を得るには，少なくとも二人の間の距離を光速度で割った経過時間が必要である．アリスの測定時刻からボブが情報を受け取ることが可能になる時刻までの間，B の状態はアリスとボブによって全く異なる．$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ をボブに転送する場合アリスはベル測定を行って，測定結果 μ を得たとしよう．前述のように，この時点でアリスにとって B は $\hat{\sigma}_\mu|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\sigma}_\mu^\dagger$ という純粋状態である．しかし因果律のためにこの時間領域でボブはアリスが測定をしたこの事実を知りようがない．しかしボブは以下の可能性は理解している．つまりアリスや A を含めた十分大きな外部補助系 R が純粋状態 $|\phi\rangle_R\langle\phi|_R$ にあって，A' が R とユニタリーな相互作用 $\hat{U}_{A'R}$ をして

$$\hat{U}_{A'R} \left(|Bell_0\rangle_{A'B}\langle Bell_0|_{A'B}|\phi\rangle_R\langle\phi|_R\right) \hat{U}_{A'R}^\dagger = |\Psi\rangle_{A'BR}\langle\Psi|_{A'BR}$$

という状態が知らない間に作られている可能性である．自分の知らない間に手元の B と量子的に縺れる相手がどんどん拡大していることはボブもあり得ると考えているわけである．例えその可能性を許容しても，自分の手元にある B には外部から物理的作用が何も及んでいないため，ボブにとって B は準備した時と同じ

$$\operatorname*{Tr}_{A'R}\left[|\Psi\rangle_{A'BR}\langle\Psi|_{A'BR}\right] = \frac{1}{2}\hat{I}_B \tag{4.71}$$

という $|\psi\rangle$ に依存しない状態のままである．このようにアリスとボブで確かに同時刻の同じ量子系 B の状態は異なっている．アリスにとっては B だけで純粋な $\hat{\sigma}_\mu|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\sigma}_\mu^\dagger$ という状態であるが，ボブにとって (4.71) 式を満たす多体系

量子縺れ状態 $|\Psi\rangle_{A'BR}\langle\Psi|_{A'BR}$ である．しかし B に対してボブがどんな測定をしても矛盾は起きない．ボブは μ の情報を持たないので，アリスにとっての B の状態 $\hat{\sigma}_\mu|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\sigma}_\mu^\dagger$ をその出現確率 1/4 で平均する必要がある．すると B の状態には $|\psi\rangle\langle\psi|$ の情報が少しも残らず，ボブがもともとから考えている $\frac{1}{2}\hat{I}_B$ と正確に一致するからである．この事実は任意の $|\psi\rangle$ に対して成り立つ

$$\frac{1}{4}\sum_{\mu=0}^{4}\hat{\sigma}_\mu|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\sigma}_\mu^\dagger = \frac{1}{2}\hat{I}$$

という恒等式から直接確認できる．

もしアリスから送られた μ の情報が古典通信路の強い雑音のためにランダムになったり，届いた情報をボブが無視して勝手に $\hat{U}_{\mu B} = \hat{\sigma}_{\mu B}^{-1}$ を B に施すとどうなるであろうか．もちろん $|\psi\rangle_B\langle\psi|_B$ は再現されず，代わりに B の状態は $\hat{I}_B/2$ になる．従って忠実な量子状態の転送のためには古典通信の精度も重要である．同様にアリスとボブで共有している量子縺れの量も重要である．例えば $0 \le p \le 1$ とした時の

$$\hat{\rho}_{A'B} = p|Bell_0\rangle_{A'B}\langle Bell_0|_{A'B} + (1-p)\frac{1}{4}\hat{I}_{A'B} \tag{4.72}$$

という混合状態を用いてアリスからボブへ $|\psi\rangle\langle\psi|$ を転送する場合，B の転送状態は

$$\hat{\rho}' = p|\psi\rangle\langle\psi| + (1-p)\frac{1}{2}\hat{I}$$

と計算される．そしてその転送状態の忠実度は

$$F = \langle\psi|\hat{\rho}'|\psi\rangle = \frac{1}{2}(1+p)$$

となる．(4.57) 式の状態と同様に，$0 \le p \le \frac{1}{3}$ では (4.72) 式の $\hat{\rho}_{A'B}$ は分解可能状態となり，量子縺れが存在しない．この場合でも忠実度は $p = 1/3$ の時に $F = 2/3$ を達成できるが，これも (1.13) 式での普遍的量子クローニングで無限に生成できる近似複製の忠実度の上限と一致している．つまり $|\psi\rangle\langle\psi|$ に含まれていた古典的な情報のみがこのテレポーテーションの操作で B に転写されたに過ぎない．

量子テレポーテーションに関するもう 1 つの興味深い側面はボブのそばに新たな人物デイブを登場させることで浮かび上がる．デイブはボブの領域にいて何回もボブが行うことを観察しているが，ボブがアリスとともに $|\psi\rangle\langle\psi|$ のテレポーテーションをしている事実を知らないとする．ボブは某所からの電話により毎回 $0, 1, 2, 3$ のどれかの数値を知らされている．デイブは毎回それを書きとめてデータ化していたが，それを検証すると電話で伝えられている数値は完全な乱数になっている．その数値 μ に依存する操作 $\hat{U}_\mu$ をボブは毎回 $\hat{I}/2$ という状態にある自分の量子ビットに施している．その後ボブは操作を終えて溜まっ

た多数の量子ビットに対して状態トモグラフィを始めた．デイブは乱数の値 μ によらずに $\hat{U}_\mu \left(\hat{I}/2\right) \hat{U}_\mu^\dagger = \hat{I}/2$ が成り立つから，トモグラフィの結果は $\hat{I}/2$ だと予想をする．しかし驚いたことに，量子ビットはある純粋状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ と推定されるデータが出る．その結果，デイブは乱数 μ とボブの量子ビットとの間には自分が知らなかった非局所的相関が存在したことに初めて気づくのである．つまり量子テレポーテーションにおける測定結果の乱数 μ と，B とは量子的に縺れていない量子ダイス系 C から生成される乱数 μ' とは本質的に異なるのである．実際系を十分に拡大すれば μ を出力する A' と B は量子的に縺れていることが分かる．この事実が μ と μ' の差を生む．μ を使えばボブの操作後の B の縮約状態は $|\psi\rangle\langle\psi|$ になるが，μ' を使えばデイブの予想通り $\hat{I}/2$ のままになる．このような外部系との相関を用いるなんらかの操作が含まれる場合，縮約状態だけの解析には限界がある．この例からも，量子状態は純粋状態で記述できるレベルまで外部系を取り入れて十分に拡大させてから他との相違を論ずるべき概念であることが理解できる．

第 5 章
連続測定と量子ゼノン効果

この章では連続測定が引き起こす変わったダイナミクスを議論する．短時間の間に何回も連続して系を理想測定すると系の運動が止まってしまう量子ゼノン効果 (quantum Zeno effect) [41] である．更にシュレーディンガーの猫の思考実験と量子ゼノン効果を組み合わせて出てくるパラドクスを解決しながら，日常における普通の観測行為が対象の量子系のダイナミクスに影響を与えない理由を説明しよう．

5.1 直接測定によるゼノン効果

ハミルトニアン $\hat{H}_S$ でダイナミクスが決まっている量子系 S を考えよう．この時間発展ユニタリー演算子は

$$\hat{U}_{oS}(t) = \exp\left(-it\hat{H}_S\right)$$

で与えられる．任意の純粋状態 $|\psi\rangle$ を時間発展させると

$$|\psi(t)\rangle_S = \hat{U}_{oS}(t)|\psi\rangle_S$$

という状態になる．ここで時刻 $t = t_1$ に状態が始状態に見つかるかどうかの理想測定を行おう．この測定演算子は

$$\hat{M}_{0S} = |\psi\rangle_S\langle\psi|_S, \tag{5.1}$$

$$\hat{M}_{1S} = \hat{I}_S - |\psi\rangle_S\langle\psi|_S \tag{5.2}$$

で与えられる．測定値 0 を得れば S は始状態にあることが確認され，1 を得れば，始状態と直交する状態に S は変化したことが分かる．そこで時刻 t における $|\psi\rangle$ の生き残り確率 (survival probability) を

$$p_{sv}(t) = \mathrm{Tr}\left[\hat{M}_{0S}^{\dagger}\hat{M}_{0S}|\psi(t)\rangle_S\langle\psi(t)|_S\right] = \left|\langle\psi|_S\hat{U}_{oS}(t)|\psi\rangle_S\right|^2$$

で与えよう．そして $\Delta t = T/N$ として時刻

$$t_n = n\Delta t, \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

に S に対して同じ測定を繰り返し行おう．測定と測定の間には S は $\hat{U}_{oS}(t)$ で時間発展する．もし第 1 回目の測定で測定値 0 を得たならば，その測定後状態は始状態 $|\psi\rangle_S\langle\psi|_S$ に一致している．従って N 回の測定全部で測定値が 0 になる確率 $p(00\cdots0)$ は，1 回あたりの生き残り確率 $p_{sv}(\Delta t)$ の N 乗で計算される．N を十分に大きくとって Δt が小さいとし，$\langle\psi|\hat{U}_{oS}(t)|\psi\rangle$ を Δt で展開すると

$$\langle\psi|\hat{U}_{oS}(t)|\psi\rangle = 1 - i\Delta t\langle\psi(0)|\hat{H}_S|\psi(t)\rangle - \frac{1}{2}\Delta t^2\langle\psi(0)|\hat{H}_S^2|\psi(t)\rangle + O(\Delta t^3) \tag{5.3}$$

となることから $p_{sv}(\Delta t)$ は

$$p_{sv}(\Delta t) = 1 - \left\langle \Delta\hat{H}_S^2 \right\rangle \Delta t^2 + O\left(\Delta t^3\right) \tag{5.4}$$

と書ける．従って N 回測定での状態の生き残り確率は

$$p(00\cdots0) = p_{sv}(\Delta t)^N \sim \left(1 - \left\langle \Delta\hat{H}_S^2 \right\rangle \frac{T^2}{N^2}\right)^N$$

と評価される．ここで

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{a}{N}\right)^N = e^{-a}$$

という公式を用いると T を固定した $N \to \infty$ の極限において

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} p(00\cdots0) &= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\left\langle \Delta\hat{H}_S^2 \right\rangle \frac{T^2}{N}\right)^N \\ &= \lim_{N\to\infty}\exp\left(-\frac{1}{N}\left\langle \Delta\hat{H}_S^2 \right\rangle T^2\right) = 1\end{aligned} \tag{5.5}$$

が示される．従って N 回の測定において必ず状態は始状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ に見出され，S の時間発展が止まることを意味している．つまり短時間の間にこの測定を繰り返しすぎると量子系のダイナミクスが完全凍結してしまうのだ．飛んでいる矢の位置が確定しているはずのある瞬間を観測すると矢は止まって見えるはずなので，無限の瞬間を積み重ねた有限時間後でも矢は動いていないはずという古代ヨーロッパのゼノンのパラドクスに因んで，この量子効果は量子ゼノン効果と呼ばれている．この量子ゼノン効果は現在では実験で確認されており [42]，量子制御の技術としても応用が試みられている．

この量子ゼノン効果をナイーブに使うと様々なパラドクスめいた思考実験を作ることが可能である [43]．例えばシュレーディンガーの猫の思考実験の拡張を考えてみよう．不安定原子核が崩壊して出てくるガンマ線を引き金にして毒薬を吹きつけられる猫の話であるが，もし猫の生死を連続的に観察したらどうなるだろうか．観察をして猫が生きていれば原子核が崩壊していないと通常結論

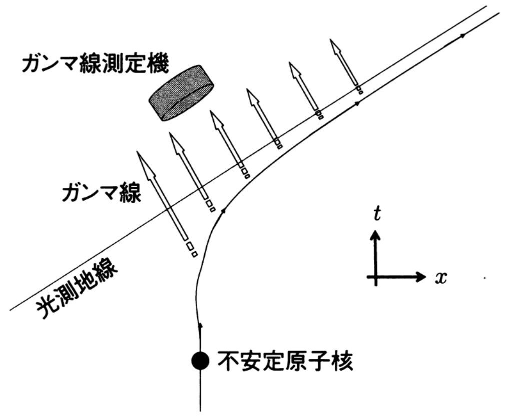


図 5.1　光測地線に漸近する運動をする不安定原子核から出てくるガンマ線を光測地線を横切った領域で測定をする．この場合量子ゼノン効果が生じると因果律と矛盾する．

づけるわけだが，ではこの猫の観察を短時間に多数回繰り返したら，量子ゼノン効果が不安定原子核にも起きるのだろうか．もしそうであれば決して原子核はガンマ線を出さず，そして猫も死なないで済む．つまり猫から目を離さなければ，猫は死なないで済むのだろうか．もちろんそういうことは起きないのだが，では量子ゼノン効果は何故働かないのだろうか．またこのパラドクス的思考実験は時空の因果律と絡めて考えることもできる．例えば図 5.1 のように不安定な原子核を一様加速度運動をさせて光測地線に漸近させよう．その結果ブラックホールの内部領域と同じように原子核に影響を与えられない時空領域が現れる．その領域にガンマ線測定機を置いて原子核の崩壊をモニターしたら量子ゼノン効果は起きるのだろうか．もし起きたらそれは時空の因果律に抵触する．しかし量子力学でも因果律は破れないので，このようなことは起きないはずである．ではどのように量子ゼノン効果は回避されているのだろうか．以下では対象系と直接相互作用をしない間接測定では一般的な条件のもとで量子ゼノン効果は起きないことを証明し，これらのパラドクスは実際には生じないことを述べる[43],[44]．

最初に有限次元系 S の物理量 $\hat{O}_S$ の対する一般的な連続測定の定式化を行おう．測定を続ける時間を T とする．時刻 $t=0$ に S の始状態 $|\psi\rangle_S$ を設定し，$0<t_1<t_2<\cdots<t_N=T$ を満たす時刻 $t=t_n$ に $\hat{O}_S$ の理想測定を行うとしよう．これを測定機まで取り入れた大きな合成系で記述する．ここでは各測定に対して簡単のためポインター基底測定を採用しよう．つまり N 個の同じ測定機系 D_n $(n=1,2,\cdots,N)$ を用意して $SD^{\otimes N}$ という合成系に対して

$$\hat{H}_m(t)=\hat{H}_S+g\hat{O}_S\sum_{n=1}^{N}\delta\left(t-t_n\right)\hat{p}_{D_n}$$

という測定相互作用を含めたハミルトニアンを考える．g は測定の実結合定数であり，$\hat{p}_{D_n}$ は各メーターの位置座標演算子 $\hat{q}_{D_n}$ に共役な運動量演算子である．各メーターの始状態 $|0\rangle_{D_n}$ は

$$\langle q_n|0\rangle_{D_n} = \psi_{D_n}(q_n) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}\Theta\left(\frac{\epsilon}{2} - |q_n|\right)$$

という波動関数で指定されるとする．$\hat{O}_S$ のスペクトル分解を

$$\hat{O}_S = \sum_\mu \omega_\mu |\omega_\mu\rangle_S \langle\omega_\mu|_S$$

とし，縮退はないとしよう．時刻 $t = t_n$ でのポインター基底測定の相互作用は n 番目のメーターの始状態 $|0\rangle_{D_n}$ を瞬間的に

$$\langle q_n|\mu\rangle_{D_n} = \psi_{D_n}(q_n - g\omega_\mu) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}\Theta\left(\frac{\epsilon}{2} - |q_n - g\omega_\mu|\right)$$

で定義される状態 $|\mu\rangle_{D_n}$ に変化させる．$\hat{O}_S$ の異なる固有値 ω_μ に対応するポインター状態 $|\mu\rangle_{D_n}$ が互いに直交するように結合定数 g を十分に大きくとる．すると

$$\hat{V}_{\mu D_n}|0\rangle_{D_n} = |\mu\rangle_{D_n}$$

という作用を起こす，μ に依存した D_n 系のユニタリー演算子 $\hat{V}_{\mu D_n}$ が作れる．この演算子を用いると制御ユニタリー演算子

$$\hat{V}_{SD_n} = \sum_\mu |\omega_\mu\rangle_S \langle\omega_\mu|_S \hat{V}_{\mu D_n}$$

が定義できる．また

$$i\partial_t \hat{U}_{SD^{\otimes N}}(t) = \hat{H}_m(t)\hat{U}_{SD^{\otimes N}}(t), \qquad \hat{U}_{SD^{\otimes N}}(0) = \hat{I}_{SD^{\otimes N}}$$

を満たす合成系の時間発展演算子は $t = T + 0$ という時刻で

$$\hat{U}_{SD^{\otimes N}}(T+0) = \hat{V}_{SD_N}\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\hat{V}_{SD_{N-1}}\hat{U}_{oS}(\Delta t_{N-1})\cdots\hat{V}_{SD_1}\hat{U}_{oS}(\Delta t_1) \tag{5.6}$$

と計算される．ここで $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$，$t_0 = 0$ としてある．これを $SD^{\otimes N}$ の始状態 $|\psi\rangle_S|0\rangle_{D_1}|0\rangle_{D_2}\cdots|0\rangle_{D_N}$ に作用すると N 回の測定が終わった後の状態は

$$|\tilde{\Phi}\rangle_{SD^{\otimes N}} = \hat{U}_{SD^{\otimes N}}(T+0)|\psi\rangle_S|0\rangle_{D_1}|0\rangle_{D_2}\cdots|0\rangle_{D_N}$$

となる．(5.6) 式を代入すると $|\tilde{\Phi}\rangle_{SD^{\otimes N}}$ は

$$|\tilde{\Phi}\rangle_{SD^{\otimes N}} = \sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} |\psi(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)\rangle_S|\mu_1\rangle_{D_1}|\mu_2\rangle_{D_2}\cdots|\mu_N\rangle_{D_N} \tag{5.7}$$

と書ける．ここで $|\psi(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)\rangle_S$ は

$$|\psi(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)\rangle_S = \hat{P}_{\mu_N S}\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\hat{P}_{\mu_{N-1}S}\hat{U}_{oS}(\Delta t_{N-1}) \cdots \hat{P}_{\mu_1 S}\hat{U}_{oS}(\Delta t_1)|\psi\rangle_S$$

で定義される規格化されていない状態であり，$\hat{P}_{\mu S}$ は S 系の射影演算子

$$\hat{P}_{\mu S} = |\omega_\mu\rangle_S\langle\omega_\mu|_S$$

である．時刻 $t = T$ において測定機系に

$$\hat{M}_{D^{\otimes N}}(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N) = \prod_{n=1}^{N} \otimes \left(|\mu_n\rangle_{D_n}\langle\mu_n|_{D_n}\right)$$

という測定演算子で定義されるメーター読み取りの理想測定を行うと各結果の出る確率は

$$\begin{aligned} p(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N) &= \operatorname*{Tr}_{SD^{\otimes N}}\left[\hat{M}_{D^{\otimes N}}(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)^\dagger \hat{M}_{D^{\otimes N}}(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)\right. \\ &\qquad \left.\times \left(|\tilde{\Phi}\rangle_{SD^{\otimes N}}\langle\tilde{\Phi}|_{SD^{\otimes N}}\right)\right] \\ &= \langle\psi(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)|\psi(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)\rangle \end{aligned}$$

で与えられる．$\hat{M}_{D^{\otimes N}}(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)$ の規格化条件

$$\sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} \hat{M}_{D^{\otimes N}}(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)^\dagger \hat{M}_{D^{\otimes N}}(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N) = \hat{I}_{D^{\otimes N}}$$

からは $p(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)$ の規格化条件

$$\sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N} p(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N) = 1$$

が得られる．

この定式化でも量子ゼノン効果は以下のように確認できる．簡単のため測定時刻の間を等間隔 $\Delta t = T/N$ にする．メーターの針が全てが測定値 0 と観測される場合の $|\psi(00\cdots0)\rangle_S$ は

$$\begin{aligned} |\psi(00\cdots0)\rangle_S &= \hat{P}_{0S}\hat{U}_{oS}(\Delta t)\hat{P}_{0S}\hat{U}_{oS}(\Delta t)\cdots\hat{P}_{0S}\hat{U}_{oS}(\Delta t)|\psi\rangle_S \\ &= |\psi\rangle_S\left(\langle\psi|_S\hat{U}_{oS}(\Delta t)|\psi\rangle_S\right)^N \end{aligned}$$

と計算される．ここで $\hat{P}_{0S} = |\psi\rangle_S\langle\psi|_S$ を用いた．従って $(00\cdots0)$ が観測される確率は

$$p(00\cdots0) = \langle\psi(00\cdots0)|\psi(00\cdots0))\rangle = \left|\langle+|_S\hat{U}_{oS}(\Delta t)|+\rangle_S\right|^{2N}$$

となる．後は (5.3) 式を代入することで $N \to \infty$ の極限において $p(00\cdots0) = 1$ となることが再確認できる．

5.2 間接測定での量子ゼノン効果の実現不可能性

先のシュレーディンガーの猫や加速する不安定原子核を用いた思考実験では量子ゼノン効果は起きないはずである．これらの系に共通することは何だろうか．それはある一方向に状態が時間発展する構造の存在である．加速する原子核系では光の測地線を跨いでしまったガンマ線は再び原子核と交差することはない．また猫の思考実験でも，不安定原子核のミクロな始状態から猫のマクロな重ね合わせ状態に進化してしまうと，再びミクロな純粋状態に戻ることは実質的にあり得ない．この特徴は以下のように理論化できる．S のヒルベルト空間 Ω_S にある部分空間 Ω_{C+W} があって，それが更に 2 つの部分空間 Ω_C と Ω_W の直和で書けるとする．そして各部分空間への射影演算子 $\hat{P}_C, \hat{P}_W$ が次の性質を満たしていると仮定しよう．

(Z1) 直交性：

$$\hat{P}_C \hat{P}_W = 0. \tag{5.8}$$

(Z2) Ω_{C+W} における閉じた時間発展：

$$\hat{U}_{oS}(t \geq 0) \left(\hat{P}_C + \hat{P}_W \right) \hat{U}_{oS}(t \geq 0)^{\dagger} = \hat{P}_C + \hat{P}_W. \tag{5.9}$$

(Z3) 一方向性条件 (one-way condition) [45]:

$$\hat{P}_C \hat{U}_{oS}(t \geq 0) \hat{P}_W = 0. \tag{5.10}$$

(Z1) は Ω_C と Ω_W が互いの直交空間であることを意味している．電磁波の輻射現象のアナロジーから Ω_C は核帯部分空間 (core-zone subspace)，Ω_W は波動帯部分空間 (wave-zone subspace) と呼ばれる [43]．(Z2) は $\Omega_C \oplus \Omega_W$ に属する任意の状態を未来に時間発展させても $\Omega_C \oplus \Omega_W$ 内に留まる条件である．(Z3) が本質的条件であり，Ω_W に属する状態を未来に発展させても Ω_W の状態になることを意味している．一般に Ω_C に属する状態は時間発展とともに Ω_W に属する状態の成分を含むようになり，Ω_C に留まる状態の成分は小さくなる．つまり核帯部分空間に属する量子状態が時間とともに波動体部分空間の状態へと崩壊していく．加速する原子核の思考実験では不安定原子核と光測地線とがまだ交差していないガンマ線の量子状態が Ω_C に属し，光測地線を超えた先のガンマ線の状態が Ω_W に属する．シュレーディンガーの猫の思考実験では，不安定原子核の励起状態や原子核から放出されたガンマ線のミクロ状態が Ω_C に属し，ガンマ線が猫を含む外部系と相互作用をして作られる量子的に縺れたマクロ状態は Ω_W に属する．量子ゼノン効果を示した連続測定の場合，Ω_C に含まれる原子核の励起準位と直接結合してその準位が占められているかどうかを確認する測定機を用いた．問題になっているのは，原子核と直接相互作用する

代わりに Ω_W に属する自由度を測定する場合である．この場合には量子ゼノン効果が起きないことが以下のように証明できる．対応する連続測定を考えるには，完全性 $\left(\hat{P}_{0S}+\hat{P}_{1S}+\hat{P}_{2S}=\hat{I}_S\right)$ を満たす

$$\hat{P}_{0S}=\hat{P}_C, \qquad \hat{P}_{1S}=\hat{P}_W, \qquad \hat{P}_{2S}=\hat{I}_S-\hat{P}_C-\hat{P}_W$$

という射影演算子を与えれば良い．これは

$$\hat{\mu}_S=\sum_{\mu=0}^{2}\mu\hat{P}_{\mu S}$$

で定義される物理量 $\hat{\mu}_S$ の理想測定にも対応している．測定値が $\mu=0$ ならば S が Ω_C に属する状態があり，$\mu=1$ ならば Ω_W に属する状態である．ここで

$$|\psi_C\rangle_S=\hat{P}_C|\psi_C\rangle_S \tag{5.11}$$

を満たす Ω_C の状態 $|\psi_C\rangle_S$ を S の始状態にしよう．(5.9) 式の性質から測定値 $\mu=2$ が出ることはない．先ほどと同様に，途中測定を行わない場合の時刻 t での生き残り確率を

$$p_{sv}(t)=\langle\psi_C|_S\hat{U}_{oS}(t)^{\dagger}\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(t)|\psi_C\rangle_S$$

で定義し，崩壊確率を

$$p_{dc}(t)=\langle\psi_C|_S\hat{U}_{oS}\,(t)^{\dagger}\,\hat{P}_W\hat{U}_{oS}\,(t)\,|\psi_C\rangle_S$$

で定義しよう．確率保存から

$$p_{sv}(t)+p_{dc}(t)=1$$

が成り立っている．(5.8) 式～(5.10) 式の関係を用いると

$$\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(t\geq 0)\hat{P}_C=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(t\geq 0), \tag{5.12}$$

$$\hat{P}_W\hat{U}_{oS}(t\geq 0)\hat{P}_W=\hat{U}_{oS}(t\geq 0)\hat{P}_W \tag{5.13}$$

を得るが，これは大変有用な関係で後でこれを多用する．

最初に $p_{dc}(t)$ の単調増加性を示そう．$|\psi_C\rangle_S$ を任意の正の時刻 $t=T_1$ に時間発展させた状態を

$$|\psi_1\rangle_S=\hat{U}_{oS}\,(T_1)\,|\psi_C\rangle_S$$

と書く．時刻 $t=T_1$ における崩壊確率は

$$p_{dc}(T_1)=\langle\psi_1|\hat{P}_W|\psi_1\rangle$$

で定義されている．(5.11) 式と (5.9) 式から

$$|\psi_1\rangle_S=\hat{P}_C|\psi_1\rangle_S+\hat{P}_W|\psi_1\rangle_S$$

が成り立つが，この右辺の 2 つの状態と $T_2 \geq T_1$ を満たす T_2 を用いて

$$|\psi_{2+}\rangle_S = \hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_C|\psi_1\rangle_S, \qquad |\psi_{2-}\rangle_S = \hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_W|\psi_1\rangle_S$$

という状態を定義する．$|\psi_1\rangle_S$ を $\hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)$ で時間発展させた状態は

$$|\psi_2\rangle_S = \hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)|\psi_1\rangle_S = |\psi_{2+}\rangle_S + |\psi_{2-}\rangle_S$$

と書ける．時刻 $t = T_2$ での崩壊確率は

$$\begin{aligned} p_{dc}(T_2) = \langle\psi_2|\hat{P}_W|\psi_2\rangle &= \langle\psi_{2-}|\hat{P}_W|\psi_{2-}\rangle + \langle\psi_{2+}|\hat{P}_W|\psi_{2-}\rangle \\ &\quad + \langle\psi_{2-}|\hat{P}_W|\psi_{2+}\rangle + \langle\psi_{2+}|\hat{P}_W|\psi_{2+}\rangle \end{aligned}$$

と計算される．また (5.13) 式から

$$\hat{P}_W\hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_W = \hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_W$$

が成り立つため，

$$\langle\psi_{2-}|\hat{P}_W|\psi_{2-}\rangle = \langle\psi_{2-}|\hat{P}_W\hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_W|\psi_1\rangle_S = p_{dc}(T_1)$$

も示せる．更に (5.13) 式と (5.8) 式から

$$\begin{aligned} \langle\psi_{2+}|\hat{P}_W|\psi_{2-}\rangle &= \langle\psi_{2+}|\hat{P}_W\left(\hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_W|\psi_1\rangle\right) \\ &= \langle\psi_{2+}|\hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_W|\psi_1\rangle \\ &= \langle\psi_1|\hat{P}_C\hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)^\dagger\hat{U}_{oS}\left(T_2 - T_1\right)\hat{P}_W|\psi_1\rangle \\ &= \langle\psi_1|\hat{P}_C\hat{P}_W|\psi_1\rangle = 0 \end{aligned}$$

も成り立っている．従って

$$p_{dc}(T_2) = p_{dc}(T_1) + \langle\psi_{2+}|\hat{P}_W|\psi_{2+}\rangle$$

と計算されるが，$\langle\psi_{2+}|\hat{P}_W|\psi_{2+}\rangle \geq 0$ であるため

$$p_{dc}(T_2) \geq p_{dc}(T_1)$$

が帰結される．これは $p_{dc}(t)$ の単調増加性を意味しており，連続性と微分可能性を課せば

$$\partial_t p_{dc}(t) \geq 0$$

と等価である．

次に連続測定に関して量子ゼノン効果が起きないことを確認する．N 回の測定の結果全てが核帯部分空間 Ω_C に属していることを示す $(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N) = (00\cdots0)$ となる確率は

$$|\psi(00\cdots0)\rangle_S = \hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_{N-1})\cdots\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_1)\hat{P}_C|\psi_C\rangle_S$$

という状態のノルムで計算される．右辺の $|\psi_C\rangle_S$ に作用している演算子は (5.12) 式を繰り返し使用すると

$$\begin{aligned}
&\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\cdots\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_3)\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_2)\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_1)\hat{P}_C\\
&=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\cdots\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_3)\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_2)\left(\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_1)\hat{P}_C\right)\\
&=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\cdots\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_3)\left(\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_2)\hat{P}_C\right)\hat{U}_{oS}(\Delta t_1)\\
&=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\cdots\left(\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_3)\hat{P}_C\right)\hat{U}_{oS}(\Delta t_2)\hat{U}_{oS}(\Delta t_1)\\
&=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\cdots\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_3)\hat{U}_{oS}(\Delta t_2+\Delta t_1)\\
&=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\cdots\hat{U}_{oS}(\Delta t_3+\Delta t_2+\Delta t_1)\\
&=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}\left(\sum_{n=1}^{N}\Delta t_n\right)=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}\left(T\right)
\end{aligned}$$

と計算されて，$|\psi(00\cdots0)\rangle_S$ は

$$|\psi(00\cdots0)\rangle_S=\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(T)|\psi_C\rangle_S$$

という形に書ける．従って $(00\cdots0)$ が観測される確率は

$$p(00\cdots0)=\langle\psi(00\cdots0)|\psi(00\cdots0)\rangle=\langle\psi_C|_S\hat{U}_{oS}(T)^\dagger\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(T)|\psi_C\rangle_S$$

から

$$p(00\cdots0)=p_{sv}(T)$$

という結果を得る．これは連続測定した生き残り確率 $p(00\cdots0)$ が測定無しの生き残り確率 $p_{sv}(T)$ に一致することを意味しており，この間接測定において量子ゼノン効果が起きないことが証明された．日常生活で対象を連続的に観察する行為が量子力学的ダイナミクスに影響を与えない理由もここにある．先のパラドクスで猫をじっと見続けても不安定原子核は普通の半減期で壊れることがこの量子力学の議論から導かれたことになる．

ここで (5.10) 式の一方向性条件についての数学的取り扱いに関してコメントをしておく．この条件式の中では $\hat{P}_C$ の特異性のために $\hat{U}_{oS}(t)$ を t の冪展開をできない．次節の (5.15) 式の $\hat{P}_W^{(C)}(t)$ でも同様である．数学的に言うと，$\hat{P}_C$ を作用させた状態は $\hat{H}$ の定義域からはずれるためである [47]．例として運動量演算子 $\hat{p}$ で定義できる

$$\hat{U}(t)=\exp(-it\hat{p})$$

という演算子に対して，位置演算子 $\hat{q}$ の表示で

$$\langle q|\hat{P}_C|q'\rangle=\Theta\left(-q\right)\delta\left(q-q'\right),\qquad\langle q|\hat{P}_W|q'\rangle=\Theta\left(q\right)\delta\left(q-q'\right)$$

で定義される射影演算子 $\hat{P}_C,\hat{P}_W$ は (5.10) 式を満たす．この場合，(5.15) 式の

$\hat{P}_W^{(C)}(t)$ は

$$\langle q|\hat{P}_W^{(C)}(t)|q'\rangle = \Theta\,(t-q)\,\Theta\,(q)\,\delta\,(q-q')$$

となり，確かに t の冪展開をできない．一方向性条件は有限次元系では近似的にしか成り立たず，S が十分大きな次元の系でなければ達成できない．つまりこの条件の成立にはマクロな自由度の存在が本質的役割を演じている．

5.3　一方向性量子ダイナミクスと崩壊時刻の確率分布

一旦測定値 $\mu = 1$ が観測された後に続く測定で $\mu = 0$ が現れる確率は零であることが (5.10) 式から示せる．例えば $\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_2)\hat{P}_W = 0$ から $(100\cdots0)$ の確率は以下のことから零になる．

$$|\psi(100\cdots0)\rangle_S = \hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\cdots\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_3)\times \left(\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_2)\hat{P}_W\right)\hat{U}_{oS}(\Delta t_1)|\psi_Z\rangle_S = 0.$$

従って非零の確率で観測される測定結果 $(\mu_1\mu_2\cdots\mu_N)$ は途中の境界で数値が 0 から 1 に変化する $(0\cdots01\cdots1)$ のような場合しか生じない．そして (5.12) 式と (5.13) 式から

$$\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_{n-1})\cdots\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_1) = \hat{P}_C\hat{U}_{oS}\left(\sum_{n'=1}^{n-1}\Delta t_{n'}\right),$$

$$\hat{P}_W\hat{U}_{oS}(\Delta t_N)\hat{P}_W\cdots\hat{P}_W\hat{U}_{oS}(\Delta t_{n+1})\hat{P}_W = \hat{U}_{oS}\left(\sum_{n'=n+1}^{N}\Delta t_{n'}\right)\hat{P}_W$$

が証明できるため n 番目の 0 の直後に 1 が出始める $|\psi(0\cdots0_{\hat{n}}1\cdots1)\rangle_S$ の場合には

$$|\psi(0\cdots0_{\hat{n}}1\cdots1)\rangle_S = \hat{U}_{oS}\,(T-t_n)\,\hat{P}_W\hat{U}_{oS}(\Delta t_n)\hat{P}_C\hat{U}_{oS}\,(t_{n-1})\,|\psi_C\rangle_S$$

という関係が成り立つ．従って $(0\cdots0_{\hat{n}}1\cdots1)$ の出現確率は

$$p(0\cdots0_{\hat{n}}1\cdots1) = \langle\psi_C|_S\hat{U}_{oS}\,(t_{n-1})^\dagger\left(\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(\Delta t_n)^\dagger\hat{P}_W\right)\times \left(\hat{P}_W\hat{U}_{oS}(\Delta t_n)\hat{P}_C\right)\hat{U}_{oS}\,(t_{n-1})\,|\psi_C\rangle_S \qquad (5.14)$$

で与えられる．ここで

$$\hat{P}_W^{(C)}(t) = \hat{U}_{oS}(t)\hat{P}_C\hat{U}_{oS}(t)^\dagger - \hat{P}_C \qquad (5.15)$$

というエルミート演算子を定義すると (5.12) 式から

$$\hat{P}_W^{(C)}(t)^2 = \hat{P}_W^{(C)}(t)$$

を満たすことから射影演算子であることが分かる．また (5.10) 式から

$$\hat{P}_C \hat{P}_W^{(C)}(t) = 0$$

が示せるため $\hat{P}_W^{(C)}(t)$ は Ω_W の部分空間への射影演算子であることも分かる．更に (5.12) 式から

$$\hat{P}_W \hat{U}_{oS}(t) \hat{P}_C = \hat{P}_W^{(C)}(t) \hat{U}_{oS}(t)$$

という便利な関係も成り立つ．

$$\hat{P}_W \hat{U}_{oS}(\Delta t_n) \hat{P}_C = \hat{P}_W^{(C)}(\Delta t_n) \hat{U}_{oS}(\Delta t_n)$$

という関係を (5.14) 式に代入すると

$$p(0\cdots 0_{\hat{n}} 1 \cdots 1) = \langle \psi_C|_S \hat{U}_{oS}\left(t_{n-1}\right)^\dagger \left(\hat{U}_{oS}(\Delta t_n)^\dagger \hat{P}_W^{(C)}(\Delta t_n)\right) \times \\ \left(\hat{P}_W^{(C)}(\Delta t_n) \hat{U}_{oS}(\Delta t_n)\right) \hat{U}_{oS}\left(t_{n-1}\right) |\psi_C\rangle_S$$

となり，従って

$$p(0\cdots 0_{\hat{n}} 1 \cdots 1) = \langle \psi_C|_S \hat{U}_{oS}\left(t_n\right)^\dagger \hat{P}_W^{(C)}(\Delta t_n) \hat{U}_{oS}\left(t_n\right) |\psi_C\rangle_S \qquad (5.16)$$

という結果を得る．$p(0\cdots 0_{\hat{n}} 1 \cdots 1)$ は確率分布の規格化条件

$$\sum_{n=1}^{N} p(0\cdots 0_{\hat{n}} 1 \cdots 1) = 1$$

を満たすため，これを用いて始状態 $|\psi_C\rangle_S \langle \psi_C|_S$ の平均崩壊時間 $\langle \tau_N(T) \rangle$ を

$$\langle \tau_N(T) \rangle = \sum_{n=1}^{N} t_n p(0\cdots 0_{\hat{n}} 1 \cdots 1)$$

と定義しよう．これに (5.16) 式を代入して計算すると

$$\langle \tau_N(T) \rangle = \sum_{n=1}^{N} t_n \langle \psi_C|_S \hat{U}_{oS}\left(t_{n-1}\right)^\dagger \hat{P}_C \hat{U}_{oS}\left(t_{n-1}\right) |\psi_C\rangle_S \\ - \sum_{n=1}^{N} t_n \langle \psi_C|_S \hat{U}_{oS}\left(t_n\right)^\dagger \hat{P}_C \hat{U}_{oS}\left(t_n\right) |\psi_C\rangle_S$$

となる．ここで

$$t_n = \sum_{n'=1}^{n} \Delta t_{n'}$$

という関係を思い出すと

$$\langle \tau_N(T) \rangle = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t_{n+1} \langle \psi_C|_S \hat{U}_{oS}\left(t_n\right)^\dagger \hat{P}_C \hat{U}_{oS}\left(t_n\right) |\psi_C\rangle_S \\ + \Delta t_1 \langle \psi_C|_S \hat{P}_C |\psi_C\rangle_S - T \langle \psi_C|_S \hat{U}_{oS}\left(T\right)^\dagger \hat{P}_C \hat{U}_{oS}\left(T\right) |\psi_C\rangle_S$$

を得るが，ここで

$$T = \sum_{n=1}^{N} \Delta t_n$$

を固定して $N \to \infty$ の極限をとると

$$\langle \tau(T) \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \tau_N(T) \rangle = \int_0^T dt \langle \psi_C |_S \hat{U}_{oS}(t)^\dagger \hat{P}_C \hat{U}_{oS}(t) |\psi_C \rangle_S - T \langle \psi_C |_S \hat{U}_{oS}(T)^\dagger \hat{P}_C \hat{U}_{oS}(T) |\psi_C \rangle_S$$

という結果を得る．測定無しの時の生き残り確率 $p_{sv}(t)$ を使えば

$$\langle \tau(T) \rangle = \int_0^T p_{sv}(t) dt - T p_{sv}(T) = \int_0^T t \partial_t (1 - p_{sv}(t)) \, dt$$

とも書ける．ここで崩壊確率 $p_{dc}(t) = 1 - p_{sv}(t)$ から

$$p(t) = \partial_t p_{dc}(t)$$

を定義しよう．これを用いると

$$\langle \tau(T) \rangle = \int_0^T t p(t) dt$$

という関係が成り立っている．また崩壊確率 $p_{dc}(t)$ の単調増加性から $p(t)$ は非負関数であり，

$$0 \le \int_0^T p(t) dt = p_{dc}(T) \le 1$$

を満たしている．ここで $T \to \infty$ の極限をとると

$$\lim_{T\to\infty} p_{dc}(T) = 1$$

から，$p(\tau)$ は規格化条件

$$\int_0^\infty p(\tau) d\tau = 1$$

を満たす状態 $|\psi_C\rangle\langle\psi_C|$ の崩壊時間に関する確率密度分布と解釈できる．また

$$\langle \tau \rangle = \lim_{T\to\infty} \langle \tau(T) \rangle = \int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau$$

で計算される $\langle \tau \rangle$ は長時間観測して測られる平均崩壊時間である．このようにダイナミクスが一方向性の性質を満たす時には，量子力学から時間間隔 τ の確率分布 $p(\tau)$ という概念が自然に導入され，様々な統計的予言をすることができる．量子力学で時間という概念は本来量子状態を定義するための特定の時刻（時空内の time-like な断面）としての外部パラメータに過ぎないが，このような特殊な場合には時間を物理量として扱えるようになる．

5.4 一方向性条件を厳密に満たすモデル

ここで (5.10) 式の一方向性条件を厳密に満たすモデルを紹介しよう[43]．考える量子系 S は A と B の部分系からなる．不安定原子核の 2 準位系を記述するのが A であり，原子核から放出されるガンマ線の自由度を記述するシュレーディンガー場 $\hat{\Psi}_B(x)$ が B である．この反応を記述する部分ヒルベルト空間 $\Omega_C \oplus \Omega_W$ においてそのダイナミクスが

$$\hat{H}_{AB} = \frac{E}{2}\left(\hat{\sigma}_{3A}+1\right) - iv\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_B^\dagger(x)\partial_x \hat{\Psi}_B(x)dx + \int_{-L/2}^{L/2} g(x)\left(\hat{\sigma}_{+A}\hat{\Psi}_B(x) + \hat{\sigma}_{-A}\hat{\Psi}_B^\dagger(x)\right)dx$$

という有効ハミルトニアンで記述できるとしよう．ここで $\hat{\sigma}_{\pm A} = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_{1A} \pm i\hat{\sigma}_{2A}\right)$ であり，E は B との相互作用がない時の A の 2 準系間のエネルギー差であり，v は相互作用がない領域での $\hat{\Psi}_B(x)$ の励起移動速度である．L は原子核のサイズを表す正の実数であり，$g(x)$ は $x \in [-L/2, L/2]$ に対してだけ非零の実数をとる A と B の間の結合定数である．$\hat{\Psi}_B(x)$ は

$$\left[\hat{\Psi}_B(x), \hat{\Psi}_B^\dagger(x')\right] = \delta\left(x-x'\right)$$

という交換関係を満たすボゾン場であり，B 系の真空状態 $|0\rangle_B$ は $\hat{\Psi}_B(x)|0\rangle_B = 0$ で定義される．$\hat{\sigma}_{3A}|\pm\rangle_A = \pm|\pm\rangle_A$ を満たす $|\pm\rangle_A$ を用いて，$\Omega_C \oplus \Omega_W$ の状態を $|+\rangle_A|0\rangle_B$ と $\hat{\Psi}_B^\dagger(x)|-\rangle_A|0\rangle_B$ の線形重ね合わせで書ける状態としよう．この場合 $\hat{P}_C, \hat{P}_W$ を

$$\hat{P}_C = \left(|-\rangle_A\langle-|_A\right)\left(\int_{-\infty}^{L/2} \hat{\Psi}_B^\dagger(x)|0\rangle_B\langle 0|_B\hat{\Psi}_B(x)dx\right) + \left(|+\rangle_A\langle+|_A\right)\left(|0\rangle_B\langle 0|_B\right),$$

$$\hat{P}_W = \left(|-\rangle_A\langle-|_A\right)\left(\int_{L/2}^{\infty} \hat{\Psi}_B^\dagger(x)|0\rangle_B\langle 0|_B\hat{\Psi}_B(x)dx\right)$$

と定義すると (5.8) 式から (5.10) 式の関係が満たされる．ここで始状態が原子核の励起状態と場の真空状態の直積状態 $|+\rangle_A|0\rangle_B$ としよう．この原子核はやがてガンマ線を 1 つ出して基底状態 $|-\rangle_A$ に遷移する．この時間発展は一般に

$$|\Phi(t)\rangle_{AB} = c(t)|+\rangle_A|0\rangle_B + \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)|-\rangle_A\left(\hat{\Psi}_B^\dagger(x)|0\rangle_B\right)dx$$

という形に書ける．この時間発展は

$$K(t) = \int_{-L/2}^{L/2} g(x)g\left(x-vt\right)dx$$

という核関数を含む

$$i\dot{c}(t) = Ec(t) - i\int_0^t K(t-\tau)c\left(\tau\right)d\tau$$

という微分方程式を $c(0)=1$ という条件のもとで解けば決定される．この形の方程式は一般にラプラス変換を用いて解くことができる．場の係数 $f(x,t)$ は得られた $c(t)$ から

$$f(x,t) = -\frac{i}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} g\left(\frac{1}{2}(x'+x-vt)\right)c\left(\frac{1}{2v}(x'-x+vt)\right)dx'$$

という公式で求められる．この始状態でのハミルトニアンの分散は

$$\langle \Delta H_S \rangle^2 = \int_{-L/2}^{L/2} |g(x)|^2 \, dx$$

で与えられる．この有限値を (5.5) 式に代入すると，原子核系 A を測定機と結合して連続測定する場合に確かに量子ゼノン効果が起きることが示せる．この場合，測定する物理量を

$$\hat{O}_S = |+\rangle_A \langle +|_A$$

にした場合に対応している．しかし $x > L/2$ の領域のガンマ線を捕獲して行う間接測定では，前述の一般論から量子ゼノン効果は生じないことが分かる．例えば測定する物理量を

$$\hat{O}_S = \int_{L/2}^{\infty} \hat{\Psi}_B^\dagger(x)|0\rangle_B\langle 0|_B \hat{\Psi}_B(x)dx$$

にして $x > L/2$ の領域でガンマ線を捕獲して行う間接測定では，量子ゼノン効果は生じない．ここでは状態が保存したか崩壊したかを調べる 2 値の理想測定のみを論じたが，一般測定でも様々な反作用を対象系 S に与える．例えば連続測定が系の時間発展を促進してしまう反ゼノン効果 (anti-Zeno effect) [48] も知られている．また相対論的場の理論における素粒子の崩壊では無限個の振動モードの存在のために始状態のエネルギー分散 $\langle \Delta H_S \rangle^2$ は発散している．無限大を繰り込みで処理すると生き残り確率は初期段階から指数関数的に減少して (5.4) 式のような経過時間の 2 次関数で減少する領域は存在しない．生き残り確率が $p_{sv}(t) = \exp(-\gamma t)$ と振る舞う場合には，

$$p_{sv}\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^N = \exp(-\gamma T) = p_{sv}(T)$$

と連続測定での生き残り確率が計算されるため，理想測定に対する量子ゼノン効果は効かなくなる．しかし一般測定を採用すると崩壊確率 γ が大きくなったり，小さくなったりする反作用があることも明らかになっている [49]．但し波動帯部分空間 Ω_W の自由度に対応する部分系を測定する場合には一般の連続測定をしても対象系には反作用を与えない [44]．

第 6 章

ウンルー効果と量子情報

6.1 一様加速度運動をする測定者と等価原理

等価原理はアインシュタインが一般相対性理論を構築する際に使用した指導原理として有名である．一様重力中を自由落下する測定者にとっての自然法則は，重力が存在しない時空を等速直線運動している測定者にとっての自然法則と一致するという主張である．逆に重力が存在しない時空内を一定の加速度を維持した直線運動をする測定者にとっての自然法則は，一様重力場の中に静止している測定者にとっての自然法則と等価であるという主張でもある．例として

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{6.1}$$

という計量で記述される平坦な 4 次元時空内において，κ を正の定数として

$$t(\tau) = \frac{1}{\kappa}\sinh(\kappa\tau), \tag{6.2}$$

$$x(\tau) = \frac{1}{\kappa}\cosh(\kappa\tau), \tag{6.3}$$

$$y(\tau) = z(\tau) = 0 \tag{6.4}$$

という軌道上を運動をする測定者を考えてみよう．この軌跡の 4 次元速度 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ に対して

$$\frac{du^\mu}{d\tau}\frac{du_\mu}{d\tau} = -\kappa^2$$

が成り立つため，時間に依存しない一定加速度 κ を持つ x 軸方向の直線運動になっている．ここで

$$t = \frac{1}{\kappa}e^{\kappa u}\sinh(\kappa\tau), \tag{6.5}$$

$$x = \frac{1}{\kappa}e^{\kappa u}\sinh(\kappa\tau), \tag{6.6}$$

$$y = y', \quad z = z' \tag{6.7}$$

で定義される (τ, u, y', z') という一般座標系を導入すると，(6.2)〜(6.4) 式の軌道は $u = y' = z' = 0$ で定まる静止軌道に一致する．計量はこの座標系で

$$ds^2 = e^{2\kappa u}\left(-d\tau^2 + du^2\right) + dy'^2 + dz'^2 \tag{6.8}$$

と計算され，計量が τ に依存しないという意味で静的であり，y', z' に依存しないという意味で一様な重力場を記述していることが分かる．u は重力ポテンシャルの変化方向を記述する高さの座標になっている．一様加速度運動はこの計量で記述される重力場を生成するということが等価原理の主張である．原理と言われているが，物理学である以上この等価原理自体も様々な実験，観測で確認すべき対象である．面白いことに，この原理は古典電磁力学の知識によって簡単だが非自明なチェックが可能である．一様加速度運動をしている測定者が質量 m，電荷 e の電子を持っているとすると，等価原理によればその電子も一様重力場の中で静止していることになる．その静的環境の中で電子は電磁波を輻射して自分のエネルギーを減少させたり，その結果としての反作用を受けたりすることはない．しかしその電子は重力のない平坦な空間内を一様加速度運動をしているのと変わらないはずである．コンパクトな空間領域内を運動する電子の電磁波輻射によるエネルギー放出率はその電子の加速度に比例することが知られているため，今の場合でも電子は連続的に電磁場を輻射している可能性があり，その輻射やそれによる反作用が実際に観測されれば等価原理は成り立たないことになる．電磁場輻射の反作用を取り入れた加速電子の相対論的古典運動方程式は

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{2e^2}{3}\left(\frac{d^2u^\mu}{d\tau^2} + u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau}\frac{du_\nu}{d\tau}\right)$$

で与えられることが知られている．この右辺の反作用の項に (6.2)〜(6.4) 式で与えられる一様加速度運動を代入してみると正確に零であることが確かめられる．これは各時刻において電子は電磁波を輻射していないことを意味しており，等価原理の主張と正しく一致している．この簡単な例に限らず，現在まで等価原理の破れは様々な実験的検証がなされており，これまでの精度ではその破れは見つかっていない [50]．また等価原理が導く一般相対論も現在までの多くの観測的事実と矛盾していない．量子重力の効果が効きだすと考えられるプランクエネルギー領域より十分に低いエネルギーだけが関与する古典的物理現象に関して，等価原理の正当性は広く受け入れられている．

量子効果を取り入れると等価原理はより深遠な様相を示し始める．存在と無という古典的実在論の観点からは全く繋がらない両極の事象を量子的等価原理は結び付けるのだ．例えば古典論においては，慣性運動をしている測定者にとって電磁場が零であれば任意の運動をしている他の測定者にとっても電磁場は零であった．だが場の量子論においては零点振動が存在するため，慣性運動をしている測定者にとって電磁場は真空状態だったとしても，一様加速度運動をして

いる測定者は光子の熱浴を観測することが示される．この現象は**ウンルー効果** (Unruh effect) [51] と呼ばれており，ブラックホールのホーキング輻射 (Hawking radiation) [52] とも密接な関係があることが知られている．この章ではウンルー効果を量子情報理論的視点を強調しながら紹介する．なお最近ブラックホール地平面の量子効果においてこの等価原理も破れる可能性も議論されているが，これは第 7 章 7.5 節で触れる．

6.2 慣性系での量子場

ウンルー効果の理解のために，説明が一番簡単な $1+1$ 次元の質量零の自由スカラー場 φ を考えよう．この作用 S_φ を

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \tag{6.9}$$

という計量で記述される平坦な空間において考えよう．

$$S_\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\left(\partial_t\varphi\right)^2 + \left(\partial_x\varphi\right)^2\right] d^2x.$$

この作用は質量項が零であるために任意の実定数 c に対する $\varphi \to \varphi + c$ という変換において不変である．この不変性をここではゲージ対称性の一種として取り扱う．実数空間 R 上でこの理論を考えるとこのゲージ自由度の部分には赤外発散が現れるが，$\partial_t\varphi$ や $\partial_x\varphi$ などのゲージ不変な物理量に関しては赤外発散は存在しない．この場の正準量子化は以下のように行える．古典場と同様に $x^\pm = t \pm x$ という光円錐座標を導入して，左進行波 $\hat{\varphi}_+(x^+)$ と右進行波 $\hat{\varphi}_-(x^-)$ の重ね合わせで場の演算子のハイゼンベルグ方程式 $\partial_{x^+}\partial_{x^-}\hat{\varphi} = 0$ の一般解を

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_+(x^+) + \hat{\varphi}_-(x^-)$$

と書くことができる．ここで各進行波は平面波モード解と

$$\left[\hat{a}^s_\omega, \hat{a}^{s'\dagger}_{\omega'}\right] = \delta_{ss'}\delta\left(\omega - \omega'\right), \qquad (s = \pm)$$

を満たす生成消滅演算子を用いて

$$\hat{\varphi}_s(x^s) = \int_0^\infty \left[\hat{a}^s_\omega e^{-i\omega x^s} + \hat{a}^{s\dagger}_\omega e^{i\omega x^s}\right]\frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}}$$

と表される．ゲージ不変な各進行成分の微分量 $\hat{\Pi}_s(x) = \partial_{x^s}\hat{\varphi}_s(x^s)$ は

$$\hat{\Pi}_s(x) = -i\int_0^\infty \left[\hat{a}^s_\omega e^{-i\omega x} - \hat{a}^{s\dagger}_\omega e^{i\omega x}\right]\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}}d\omega$$

と量子化されており，

$$\left[\hat{\Pi}_s(x), \hat{\Pi}_{s'}(y)\right] = \frac{i}{2}\delta_{ss'}\partial_x\delta(x-y)$$

という交換関係を満たしている．エネルギー密度演算子は

$$\hat{\varepsilon}(t,x) = \frac{1}{2} : (\partial_t \hat{\varphi})^2 : + \frac{1}{2} : (\partial_x \hat{\varphi})^2 :$$

で定義される．ここで :: は生成消滅演算子に関する正規順序 (normal ordering) を表している．エネルギー密度も各進行波成分 $\varepsilon_\pm(x) =: \Pi_\pm(x)^2 :$ を用いて

$$\hat{\varepsilon}(t,x) = \hat{\varepsilon}_+(x^+) + \hat{\varepsilon}_-(x^-)$$

と分解できる．ハミルトニアンは $\hat{\varepsilon}(t,x)$ の空間積分で定義され，各進行波の非負演算子 $H_\pm$ の和で与えられる．

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}(t,x)dx = H_+ + H_-, \qquad H_s = \int_0^{\infty} \omega a_\omega^{s\dagger} a_\omega^s d\omega.$$

真空状態 $|0_M\rangle$ は $a_\omega^s|0_M\rangle = 0$ で定義され，ハミルトニアンの最低固有値零に対応する固有状態である．同時に粒子数演算子

$$\hat{N}_a = \sum_{s=\pm} \int_0^{\infty} \hat{a}_\omega^{s\dagger} \hat{a}_\omega^s d\omega$$

の固有値が零の固有状態である．

パリティ対称性から左進行波の結果から右進行波の結果は常に再現できる．このため以降では左進行波 $\hat{\varphi}_+(x^+)$ だけを用いて解析を進める．場 $\hat{\Pi}_+(x)$ の真空状態における 2 点関数は

$$G(x-x') = \langle 0_M|\hat{\Pi}_+(x)\hat{\Pi}_+(x')|0_M\rangle = -\frac{1}{4\pi\left(x-x'-i0\right)^2}$$

と計算され，赤外発散を持たない．ここで $-i0$ は 0 から虚軸のマイナス方向に無限小だけずらした純虚数であり，0 を跨ぐ $G(x)$ の積分を行う時に積分経路を指定している．

6.3　一様加速度系での量子場

図 6.1 のように空間座標原点 $(x=0)$ の右側の $x \geq |t|$ で定義される時空領域 R を考えよう．(6.5)∼(6.7) 式と同様に，$-\infty < u < \infty, -\infty < \tau < \infty$ の範囲の値とるパラメータで構成される一般座標系 (τ, u)

$$t = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa u} \sinh(\kappa\tau), \tag{6.10}$$

$$x = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa u} \cosh(\kappa\tau). \tag{6.11}$$

を考えよう．この座標系はこの領域 R を全て覆うことが分かる．この座標系で $u=0$ と置いて得られる軌跡は図 6.1 のように (6.2), (6.3) 式の一様加速度運動の軌跡と一致している．この一般座標系での計量は前節と同様に

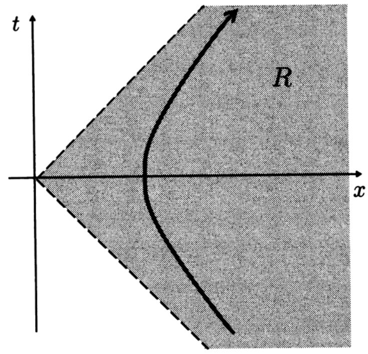


図 6.1　リンドラー時空の右側領域 R.

$$ds^2 = e^{2\kappa u}\left(-d\tau^2 + du^2\right)$$

と計算される．これは時間座標 τ に依存しない静的重力場を記述している．時間推進変換 $\tau \to \tau + c$ に対するこの計量の不変性は，元の慣性座標の (6.9) 式の計量が持っているローレンツ不変性が起源である．ここで

$$r = \frac{1}{\kappa}e^{\kappa u}, \qquad (0 \le r < \infty)$$

という座標を導入すれば計量は

$$ds^2 = -r^2(\kappa d\tau)^2 + dr^2 \tag{6.12}$$

とも書くことができる．この座標系で覆われる時空をリンドラー時空 (Rindler spacetime) と呼ぶ．この計量に虚時間 $\tau_E = i\tau$ を代入して得られるユークリッド計量

$$ds_E^2 = r^2(\kappa d\tau_E)^2 + dr^2 \tag{6.13}$$

は質量の大きなブラックホールの分配関数を評価する経路積分法の計算でも重要になる．鞍点法によって分配関数の経路積分を評価する場合，特異性を持たない古典解の寄与が大きくなる．そのため r を動径座標，$\theta = \kappa\tau_E$ を角度座標とみなして，この計量が記述する多様体上の $r = 0$ に特異点が現れないことを要請すると，θ には 2π 周期，つまり虚数時間座標 τ_E には $2\pi/\kappa$ 周期が課せられる．この周期性がブラックホールのホーキング温度 $\kappa/(2\pi)$ を定める構造になっている[53],[54]．(6.13) 式の計量を通じて，ブラックホールの熱力学と一様加速度運動をする測定者の物理は密接に関わっているため，この平坦な時空での一様加速度系には温度 $\kappa/(2\pi)$ の熱力学の物理が隠れていることも自然に理解できる．

領域 R において光円錐座標系 $u^{\pm} = \tau \pm u$ を導入すると (6.10), (6.11) 式の座標変換は

$$x^{\pm} = \pm\frac{1}{\kappa}e^{\pm\kappa u^{\pm}} \tag{6.14}$$

とまとめられる．これを用いると簡単に運動方程式が

$$\partial_{u^+}\partial_{u^-}\hat{\varphi} = 0$$

と書ける．従って慣性座標系と同様に，この解はこの座標系での左進行波と右進行波の寄与の和で

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{+R}(u^+) + \hat{\varphi}_{-R}(u^-)$$

と与えられる．各進行波成分は

$$\hat{\varphi}_{sR}(u^s) = \int_0^\infty \left[\hat{b}^s_\omega e^{-i\omega u^s} + \hat{b}^{s\dagger}_\omega e^{i\omega u^s}\right]\frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \tag{6.15}$$

で定義され，$\hat{b}^s_\omega$ と $\hat{b}^{s\dagger}_\omega$ は

$$\left[\hat{b}^s_\omega, \hat{b}^{s'\dagger}_{\omega'}\right] = \delta_{ss'}\delta\left(\omega - \omega'\right), \qquad (s = \pm) \tag{6.16}$$

を満たす生成消滅演算子であるが，$\hat{a}^s_\omega, \hat{a}^{s\dagger}_\omega$ とは異なる．時間座標 τ に共役なエネルギー $\hat{H}_R$ は各進行波の寄与の和で $\hat{H}_R = \hat{H}_{+R} + \hat{H}_{-R}$ と書け，各寄与は

$$\hat{H}_{\pm R} = \int_0^\infty \omega \hat{b}^{\pm\dagger}_\omega \hat{b}^\pm_\omega d\omega \tag{6.17}$$

で計算される．ここで注意が必要なのは，$\hat{H}_R$ は慣性系でのハミルトニアン $\hat{H}$ と異なるという事実である．実際に慣性座標系で見ると $\hat{H}_R$ はエネルギー演算子ではなく，ローレンツ変換の生成子になっている．この量子化での粒子数演算子は

$$\hat{N}_b = \sum_{s=\pm}\int_0^\infty \hat{b}^{s\dagger}_\omega \hat{b}^s_\omega d\omega$$

で定義され，$\hat{b}^s_\omega$ と $\hat{b}^{s\dagger}_\omega$ で記述される粒子が 1 つも存在しない状態 $|0\rangle_R$ は

$$\hat{b}^s_\omega|0\rangle_R = 0$$

で定義される．$|0\rangle_R$ はリンドラー真空状態 (Rindler vacuum state) とも呼ばれるが，慣性系から見ると $|0\rangle_M$ とは異なり，多数の粒子が励起されている状態になっている．

この座標系でも右進行波の解析は左進行波成分の結果に u^1 に関するパリティ変換を施すだけで得られるため，一般性を失うことなく左進行波成分だけを解析すればよい．ゲージ不変な場 $\hat{\Pi}_{+R}(u^+) = \partial_{u^+}\hat{\varphi}_{+R}(u^+)$ の 2 点関数は

$$\langle 0_M|\hat{\Pi}_{+R}(u^+_1)\hat{\Pi}_{+R}(u^+_2)|0_M\rangle = \frac{dx^+_1}{du^+_1}\frac{dx^+_2}{du^+_2}\langle 0_M|\hat{\Pi}_+(x^+_1)\hat{\Pi}_+(x^+_2)|0_M\rangle$$

という関係から

$$\langle 0_M|\hat{\Pi}_{+R}(u_1^+)\hat{\Pi}_{+R}(u_2^+)|0_M\rangle = -\frac{\kappa^2}{16\pi\sinh^2\left(\frac{\kappa}{2}(u_1 - u_2 - i0)\right)} \tag{6.18}$$

と計算される．面白いことに，この 2 点関数はちょうど温度 $1/\beta = \kappa/(2\pi)$ のギブス状態

$$\hat{\rho}_R(\beta) = \frac{\exp\left(-\beta\hat{H}_R\right)}{\mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\beta\hat{H}_R\right)\right]} \tag{6.19}$$

における 2 点関数に一致する．つまり領域 R における演算子 $\hat{O}_R$ に対して

$$\left\langle \hat{O}_R \right\rangle_\beta = \mathrm{Tr}\left[\hat{O}_R\hat{\rho}_R(\beta)\right]$$

という表記を導入すると，

$$\left\langle \hat{\Pi}_{+R}(u_1)\hat{\Pi}_{+R}(u_2) \right\rangle_{\beta=2\pi/\kappa} = \langle 0_M|\hat{\Pi}_{+R}(u_1)\hat{\Pi}_{+R}(u_2)|0_M\rangle \tag{6.20}$$

と関係が確かめられる．証明は以下の通りである．まず

$$\hat{\Pi}_{+R}(u^+) = \partial_{u^+}\hat{\varphi}_{+R}(u^+) = -i\int_0^\infty \left[\hat{b}_{+\omega}e^{-i\omega u^+} - \hat{b}_{+\omega}^\dagger e^{i\omega u^+}\right]\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}}d\omega$$

という関係と，ボソン粒子の有限温度系における

$$\left\langle \hat{b}_\omega^{+\dagger}\hat{b}_{\omega'}^+ \right\rangle_\beta = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\delta(\omega-\omega'), \qquad \left\langle \hat{b}_\omega^+\hat{b}_{\omega'}^+ \right\rangle_\beta = 0$$

という関係を用いると

$$\left\langle \hat{\Pi}_{+R}(u_1)\hat{\Pi}_{+R}(u_2) \right\rangle_\beta = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega}{e^{\beta\omega}-1}e^{i\omega(u_1-u_2)}d\omega$$

と計算される．ここで

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega}{e^{\pi\omega}-1}e^{i\omega x}d\omega = -\frac{1}{\sinh^2(x-i0)}$$

というフーリエ変換の関係を使えば (6.20) 式が導かれる．真空状態 $|0\rangle_M$ はガウス型量子状態であるために，場の 2 点関数で一意的に特徴づけできる．従って (6.20) 式は

$$\hat{\rho}_R\left(\beta = \frac{\kappa}{2\pi}\right) = \mathrm{Tr}_{\bar{R}}\left[|0_M\rangle\langle 0_M|\right] \tag{6.21}$$

という関係を意味する．ここで $\bar{R}$ は R の外部領域である $x \le 0$ の領域であり，$\mathrm{Tr}_{\bar{R}}$ はその領域の場の自由度に関する部分トレースを意味する．

真空状態 $|0\rangle_M$ における場の揺らぎは (τ, u) の座標系において熱浴での揺らぎとして記述ができることは確認できた．この熱揺らぎは一様加速度運動をしている局所的測定機によっても実際に測定できると考えられる．例えばこの揺らぎを観測する測定機としてある調和振動子を考えよう．その位置演算子を $\hat{q}$，運動量演算子を $\hat{p}$ としよう．その自由ハミルトニアンを

$$\hat{H}_D = \frac{1}{2}\left(\hat{p}^2 + m^2\hat{q}^2\right)$$

とし，その固有値 $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)m \ (n=0,1,2,\cdots)$ に対応する固有状態を $|E_n\rangle$ と書く．測定機の初期状態を $|E_0\rangle$ とし，量子場の初期状態を $|0\rangle_M$ とする．そして座標系 (τ, u) において時刻 $\tau = 0$ から調和振動子と量子場 $\hat{\varphi}$ との間に測定相互作用

$$\hat{H}_{int} = \hat{q}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(u)\partial_u\hat{\varphi}(u)du \tag{6.22}$$

が加わるとしよう．ここで $\lambda(u)$ は調和振動子が占めるある有界な空間領域だけで非零な実関数とする．この合成系の状態の時間発展を経路積分で記述しよう．調和振動子に対しては $\hat{q}$ の固有状態が成す基底系での波動関数表示を考え，場に対しては $\hat{\varphi}(u)$ の各位置座標での固有状態が成す基底系

$$\left\{|\phi\rangle = \prod_u|\phi(u)\rangle : \hat{\varphi}(u)|\phi(u)\rangle = \phi(u)|\phi(u)\rangle\right\}$$

での波動関数表示を採用する．調和振動子と $\hat{\varphi}$ の初期波動関数はそれぞれ $\psi_0(q) = \langle q|E_0\rangle, \Phi_0[\phi] = \langle\phi|0_M\rangle$ で与えられるとしよう．時刻 $\tau = \tau_f \ (\geq 0)$ での合成系の状態を記述する波動関数 $\Psi(\tau_f, q_f, \phi_f]$ は，調和振動子の引数 q_f に依存する関数であり，同時に場の引数 $\phi_f(u)$ に依存する汎関数である．これは経路積分により

$$\begin{aligned}\Psi(\tau_f, q_f, \phi_f] = &\int_{-\infty}^{\infty} dq_0\psi_0(q_0)\int D\phi_0\Phi_0[\phi_0]\times \\ &\int_{\phi_0}^{\phi_f}\tilde{D}\phi\int_{q_0}^{q_f}\tilde{D}q\exp\left[i\int_0^{\tau_f}d\tau\Bigg(L_o(q,\phi]\right. \\ &\left.\left. -q(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(u)\partial_u\phi(\tau,u)du\right)\right]\end{aligned} \tag{6.23}$$

と計算される．ここで $L_o(q,\phi]$ は

$$L_o(q,\phi] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - m^2q^2\right] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left((\partial_\tau\phi)^2 - (\partial_u\phi)^2\right)du$$

で定義される自由ラグランジアンである．前章までで論じてきた量子測定理論では，測定機の状態の時間発展を直接解析をすることはなかった．しかしここでは測定機が真空の量子揺らぎと相互作用をすることによってどのように反応をするかを調べてみる．これにはファインマンとバーノンの影響汎関数 (Feynman–Vernon Influence Functional) [55] を用いるのが便利である．(6.23) 式の状態において $\hat{\varphi}$ の自由度に対する部分トレースをとってして得られる調和振動子の混合状態は

$$\rho(\tau_f, q_f, \bar{q}_f) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q}_0 \psi_0(q_0)\psi_0^*(\bar{q}_0) \int_{q_0}^{q_f} \tilde{D}q \int_{\bar{q}_0}^{\bar{q}_f} \tilde{D}\bar{q} F(\tau_f, q, \bar{q}]$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{2}\int_0^{\tau_f} d\tau \left(\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - m^2 q(\tau)^2\right)\right]$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{2}\int_0^{\tau_f} d\tau \left(\left(\frac{d\bar{q}}{d\tau}\right)^2 - m^2 \bar{q}(\tau)^2\right)\right]$$

で表せる．影響汎関数 $F(\tau_f, q, \bar{q}]$ は

$$F(\tau_f, q, \bar{q}] = \int D\phi_f \int D\bar{\phi}_0 \int D\phi_0 \Phi_0^* \left[\bar{\phi}_0\right] \Phi_0 \left[\phi_0\right]$$
$$\times \int_{\phi_0}^{\phi_f} \tilde{D}\phi \exp\Bigg[i \int_0^{\tau_f} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du \Bigg(\frac{1}{2}\left((\partial_\tau \phi)^2 - (\partial_u \phi)^2\right)$$
$$- q(\tau)\lambda(u)\partial_u \phi(\tau, u)\Bigg)\Bigg]$$
$$\times \int_{\bar{\phi}_0}^{\phi_f} \tilde{D}\bar{\phi} \exp\Bigg[-i \int_0^{\tau_f} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du \Bigg(\frac{1}{2}\left((\partial_\tau \bar{\phi})^2 - (\partial_u \bar{\phi})^2\right)$$
$$- \bar{q}(\tau)\lambda(u)\partial_u \bar{\phi}(\tau, u)\Bigg)\Bigg]$$

で定義され，$F(\tau_f, q, \bar{q}]^* = F(\tau_f, \bar{q}, q]$ という性質を持っている．真空状態がガウス型波動関数の $\Phi_0\left[\phi_0\right]$ で記述できることから場の経路積分は具体的に

$$F(\tau_f, q, \bar{q}] = \exp\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\int_0^{\tau_f} d\tau_1 \int_0^{\tau_f} d\tau_2 q(\tau_1)\eta(|\tau_1 - \tau_2|)q(\tau_2) \\ -\frac{1}{2}\int_0^{\tau_f} d\tau_1 \int_0^{\tau_f} d\tau_2 \bar{q}(\tau_1)\eta(|\tau_1 - \tau_2|)^* \bar{q}(\tau_2) \\ +\int_0^{\tau_f} d\tau_1 \int_0^{\tau_f} d\tau_2 \bar{q}(\tau_1)\eta(\tau_1 - \tau_2)q(\tau_2) \end{array}\right]$$

と計算できる [56]．ここで場からの影響は

$$\eta(\tau_1 - \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \lambda(u_1) \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \lambda(u_2) \langle 0_M | \partial_u \hat{\varphi}(\tau_1, u_1) \partial_u \hat{\varphi}(\tau_2, u_2) | 0_M \rangle$$

という関数にまとめられており，これは $\langle 0_M | \partial_u \hat{\varphi}(\tau_1, u_1) \partial_u \hat{\varphi}(\tau_2, u_2) | 0_M \rangle$ という 2 点相関関数だけから定まっている．この相関関数は右向き波と左向き波の 2 点相関関数から計算される．このため (6.20) 式の関係から，加速度 κ の一様加速度運動をしている調和振動子は，確かに温度 $\kappa/(2\pi)$ の熱揺らぎを測定していることが分かる．特に実数 g をもちいて $\lambda(u) = g\delta(u)$ と置いて調和振動子を $u = 0$ という軌跡上で一様加速度運動をさせた場合，$\eta(\tau)$ は

$$\eta(\tau) = -\frac{g^2\kappa^2}{8\pi \sinh^2\left(\frac{\kappa}{2}\tau - i0\right)}$$

と評価される．各時刻において調和振動子の状態トモグラフィを行ってデータをとれば，確かに温度 $\kappa/(2\pi)$ のプランク因子 $\left(e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega} - 1\right)^{-1}$ を持つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{g^2\omega}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega} - 1}$$

という $\eta(\tau)$ のスペクトルは実測できる．

熱浴が観測されるこのウンルー効果は空間の次元を上げても，またスカラー場以外の量子場でも存在する [57], [58]．更に相互作用のある一般の場合でも成り立つと考えられている [59], [60]．その根本は (6.10), (6.11) 式の座標変換の形にある．一般に相互作用のある量子場においても場の演算子の多点相関関数によって状態は記述できる．相関関数の各座標点に (6.10), (6.11) 式を代入すれば，(τ, u) 座標系での相関関数に翻訳される．ここで (6.10), (6.11) 式は $\tau \to \tau + 2\pi i/\kappa$ の変換で不変であり，時間 τ の純虚数方向に対して $2\pi/\kappa$ という周期性をもっている．この性質は状態が熱的であることと同等であるため，相互作用がある場合においても，その真空状態を一様加速度運動する測定機は温度 $\kappa/(2\pi)$ での熱揺らぎを観測する．

ウンルー効果は真空の量子縺れに対して重要な情報を与える．特に自由場 $\hat{\varphi}$ の真空状態 $|0\rangle_M$ に関しては，ウンルー効果の解析を用いることによってその量子縺れ状態を具体的に解析することができる．領域 R に重なる $x^+ > 0$ という領域でウンルーモード関数 $e^{-i\omega u^+}/\sqrt{4\pi\omega}$ を考えよう．$x^+ < 0$ ではモード関数の値は零とする．これを ω_o から $\omega_o + \Delta\omega$ までの角振動数で重ね合わせて，更に $x^+ = e^{\kappa u^+}/\kappa$ で定義された座標 x^+ の関数とみなして

$$\begin{aligned}\xi_B(x^+) &= \frac{\Theta(x^+)}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \sqrt{\frac{1}{4\pi\omega}} e^{-i\omega u^+} d\omega \\ &= \frac{\Theta(x^+)}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \sqrt{\frac{1}{4\pi\omega}} \left(\kappa x^+\right)^{-i\frac{\omega}{\kappa}} d\omega\end{aligned}$$

を定義する．ここで $\Theta(x)$ はヘビサイドの階段関数 ($\Theta(x > 0) = 1$, $\Theta(x < 0) = 0$) である．すると $\xi_B(x^+)$ は

$$2i \int_{-\infty}^{\infty} \xi_B(x^+)^* \partial_{x^+} \xi_B(x^+) dx^+ = 1 \tag{6.24}$$

という規格化条件を満たすことが分かる．(6.24) 式の左辺の積分はもう一度 u^+ 座標に変換すると簡単に遂行できる．(6.24) 式を用いると

$$\hat{b} = 2i \int_{-\infty}^{\infty} \xi_B(x)^* \hat{\Pi}_+(x) dx$$

で定義される演算子 $\hat{b}$，及びそのエルミート共役演算子 $\hat{b}^\dagger$ は $\left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = 1$ を満たす消滅生成演算子であることが分かる．同様に $x \le -|t|$ で定義される領域 L を考える．この領域で

$$x^\pm = -\frac{1}{\kappa} e^{\kappa v^\pm}$$

という座標変換を考えよう．図 6.2 のように時間の流れの向きが x 座標と v 座標の間で逆になるようにとられていることに注意が必要である．また L 領域と重なる $x^+ < 0$ の領域で

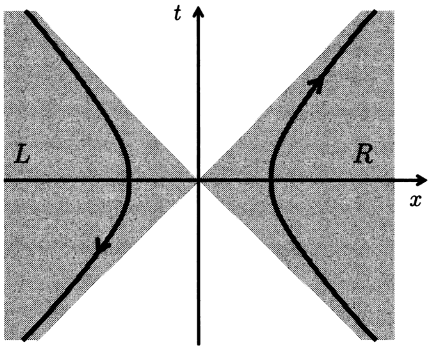


図 6.2　リンドラー時空の右側領域 R と左側領域 L．R と L は因果的に結ばれていない．

$$\xi_C(x^+) = \frac{\Theta(-x^+)}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \sqrt{\frac{1}{4\pi\omega}} e^{i\omega v^+} d\omega$$
$$= \frac{\Theta(-x^+)}{\sqrt{\Delta\omega}} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \sqrt{\frac{1}{4\pi\omega}} \left(-\kappa x^+\right)^{i\frac{\omega}{\kappa}} d\omega$$

というモード関数を考えよう．(指数関数の肩の符号に注意．) この場合も

$$2i \int_{-\infty}^{\infty} \xi_C(x)^* \partial_x \xi_C(x) dx = 1$$

という規格化条件が満たされることが確認できる．そこで

$$\hat{c} = 2i \int_{-\infty}^{\infty} \xi_C(x)^* \hat{\Pi}_+(x) dx$$

という演算子を定義すれば $\left[\hat{c}, \hat{c}^\dagger\right] = 1$ が満たされる．さらに空間的局所性を意味する $\left[\hat{b}, \hat{c}\right] = \left[\hat{b}, \hat{c}^\dagger\right] = 0$ という関係も成り立っている．従って R 領域に $\hat{b}$ で記述される調和振動子 B, L 領域に $\hat{c}$ で記述される調和振動子 C という，空間的に離れた 2 つの独立な調和振動子の自由度を導入できたことになる．$|0_M\rangle$ がガウス状態であるため，この 2 個の調和振動子の状態を記述する縮約密度演算子 $\hat{\rho}_{BC}$ もガウス状態である．従って $\hat{\rho}_{BC}$ は 2 点相関関数によって一意的に決定できる．これを具体的に実行してみよう．$\left\langle \hat{O} \right\rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{BC}\hat{O}\right]$ という表記を以降では使おう．$\hat{b}^\dagger$ と $\hat{b}$ の相関関数は

$$\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_B(x_1) \xi_B^*(x_2) \langle 0_M | \hat{\Pi}_+(x_1) \hat{\Pi}_+(x_2) | 0_M \rangle dx_1 dx_2$$

から計算されるが，これは座標変換 $x = e^{\kappa u}/\kappa$ を用いて

$$\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle = -\frac{\kappa^2}{16\pi^2 \Delta\omega} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \frac{e^{-i\omega_1 u_1 + i\omega_2 u_2}}{\sinh^2\left(\frac{\kappa}{2}\left(u_1 - u_2\right) - i0\right)}$$

と具体的に書かれる．ここで

$$\frac{1}{\sinh^2(x-i0)} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{e^{\pi k}-1} e^{ikx} dk$$

という公式を用いると

$$\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \frac{d\omega}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega}-1}$$

が示される．更に $\Delta\omega \to 0$ の極限を考えると $\xi_B(x^+)$ は $u^\pm$ 座標の平面波モード関数に一致し，また相関関数は

$$\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega_o}-1} \tag{6.25}$$

となる．同様に $\hat{c}^\dagger$ と $\hat{c}$ の相関関数も

$$\left\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \right\rangle = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega_o}-1} \tag{6.26}$$

となる．$\hat{b}^\dagger$ と $\hat{c}^\dagger$ の相関関数は R に関して $x_1 = e^{\kappa u}/\kappa$，$L$ に関して $x_2 = -e^{\kappa v}/\kappa$ という座標変換を用いると

$$\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger \right\rangle = \frac{\kappa^2}{16\pi^2\Delta\omega} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_1 u} e^{i\omega_2 v}}{\cosh^2\left(\frac{\kappa}{2}(u-v)\right)} du dv$$

と評価できる．ここで

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2\sinh\left(\frac{\pi}{2}k\right)} e^{ikx} dk$$

という公式を用いると

$$\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger \right\rangle = \frac{1}{2\Delta\omega} \int_{\omega_o}^{\omega_o+\Delta\omega} \frac{d\omega}{\sinh\left(\frac{\pi}{\kappa}\omega\right)}$$

が示される．従って $\Delta\omega \to 0$ の極限では $\xi_C(x^+)$ も L 領域で $v^\pm$ 座標系での平面波モード関数に一致するが，2 点関数は

$$\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger \right\rangle = \left\langle \hat{b}\hat{c} \right\rangle = \frac{1}{2\sinh\left(\frac{\pi}{\kappa}\omega_o\right)} \tag{6.27}$$

で与えられる．そして上記以外の 2 点相関関数は全て消えることも確認できる．

$$\left\langle \hat{b}\hat{b} \right\rangle = \left\langle \hat{c}\hat{c} \right\rangle = \left\langle \hat{b}^\dagger \hat{c} \right\rangle = \left\langle \hat{b}\hat{c}^\dagger \right\rangle = 0. \tag{6.28}$$

(6.25) 式から (6.28) 式までの相関関数を実現するガウス状態は純粋状態 $\hat{\rho}_{BC} = |\Phi_{BC}\rangle\langle\Phi_{BC}|$ であり，

$$|\Phi\rangle_{BC} = \sqrt{1-e^{-\frac{2\pi\omega_o}{\kappa}}} \exp\left(e^{-\frac{\pi\omega_o}{\kappa}} \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger\right) |0\rangle_B |0\rangle_C \tag{6.29}$$

と書かれることも示される．ここで $|0\rangle_B$ ($|0\rangle_C$) は $\hat{b}|0\rangle_B = 0$ ($\hat{c}|0\rangle_C = 0$) で定

義される B と C の基底状態である．(6.29) 式の状態は指数関数を展開することによって

$$|\Phi\rangle_{BC} = \sqrt{1-e^{-\frac{2\pi\omega_o}{\kappa}}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega_o}{\kappa}n}|n\rangle_B|n\rangle_C \tag{6.30}$$

とも書ける．ここで $|n\rangle_B = \hat{b}^{\dagger n}|0\rangle_B/\sqrt{n!}, |n\rangle_C = \hat{c}^{\dagger n}|0\rangle_C/\sqrt{n!}$ である．従って C の自由度を縮約すると確かに

$$\operatorname*{Tr}_C\left[|\Phi\rangle_{BC}\langle\Phi|_{BC}\right] \propto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\omega_o}{\kappa}n}|n\rangle_B\langle n|_B = \exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa}\omega_o\hat{b}^\dagger\hat{b}\right) \tag{6.31}$$

という温度 $T=\kappa/(2\pi)$ のギブス状態が再現する．

これまでの議論では角振動数を ω_o に固定したが，もちろん異なる値に対しても同様に $\hat{b},\hat{c}$ は定義される．更に $R(L)$ での $u^\pm(v^\pm)$ 座標の平面波モード関数の直交性から，角振動数の異なる全ての生成消滅演算子は互いに可換であることが証明できる．このことは全ての角振動数のモード毎に (6.29) 式の純粋状態になっていることを示している．従って左右の進行波の自由度 s も取り入れて真空状態 $|0_M\rangle$ は

$$|0_M\rangle \propto \exp\left(\sum_{s=\pm}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\hat{b}^{s\dagger}_\omega\hat{c}^{s\dagger}_\omega d\omega\right)|0_{Rindler}\rangle \tag{6.32}$$

と書かれることが分かる．ここで $\hat{b}^\pm_\omega$ は (6.15) 式で定義される R 領域の演算子であり，$\hat{c}^\pm_\omega$ はそれを空間反転変換して得られる，

$$\left[\hat{c}^s_\omega, \hat{c}^{s'\dagger}_{\omega'}\right] = \delta_{ss'}\delta\left(\omega-\omega'\right), \qquad (s=\pm)$$

を満たす L 領域の演算子である．$|0_{Rindler}\rangle$ は $\hat{b}^s_\omega|0_{Rindler}\rangle = \hat{c}^s_\omega|0_{Rindler}\rangle = 0$ で定義される状態であり，リンドラー真空状態 (Rindler vacuum state) と呼ばれる．$\hat{b}^{s\dagger}_\omega, \hat{c}^{s\dagger}_\omega$ をリンドラー真空にかけて得られる状態で記述される準粒子はリンドラー粒子と呼ばれる．(6.32) 式は形式的に

$$|0_M\rangle \propto \prod_{\omega,s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}n(\omega,s)}|n\left(\omega,s\right)\rangle_B|n\left(\omega,s\right)\rangle_C\right) \tag{6.33}$$

とも書かれる．$|n\left(\omega,s\right)\rangle_B$ $\left(|n\left(\omega,s\right)\rangle_C\right)$ は $(\omega, s=\pm)$ で指定される $B(C)$ 系の n 個のリンドラー粒子の状態である．この (6.33) 式で L 領域の自由度を縮約すると (6.19) 式のギブス状態が再現される．

6.4 ウンルー効果とエンタングルメントエントロピー

R 領域を一定加速度 κ で直線運動をしている測定者にとって L 領域は相対論の意味で空間的 (space-like) な位置にあり，因果的に結ばれていない．局所

的操作は R 領域上のものに限定されるため，この測定者にとって場の状態は L の自由度を縮約した

$$\hat{\rho}_R = \operatorname*{Tr}_L\left[|0_M\rangle\langle 0_M|\right] = \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa}\hat{H}_R\right)}{\mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa}\hat{H}_R\right)\right]} \tag{6.34}$$

というギブス状態で与えられる．$\hat{\rho}_R$ のフォンノイマンエントロピーは R 領域と L 領域の場の揺らぎの間の量子縺れエントロピー S と解釈できる．一方 (6.34) 式と (6.17) 式から，S は (τ, u) 座標系で張られる平坦な時空中を一様に満たす温度 $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ の熱輻射の通常のエントロピーと一致することも分かる．空間が 1 次元の場合，一般にエントロピー密度 ϱ_{th} は温度 T と

$$\varrho_{th} = \frac{\pi}{3}T \tag{6.35}$$

という関係にある．これを $[u_1, u_2]$ 領域で積分すると

$$S = \int_{u_1}^{u_2} \varrho_{th} du = \varrho_{th}\left(u_2 - u_1\right) \tag{6.36}$$

というエントロピーが領域内に存在することになる．慣性系の x 座標で表すと，$u_b = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\kappa x_b\right)$ $(b = 1, 2)$ と関係から

$$S = \frac{\varrho_{th}}{\kappa}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

と書かれる．しかし ϱ_{th} を R 領域全体で積分したとすると，S は原点 $x_1 = 0$ と無限遠点 $x_2 = \infty$ の寄与のために発散してしまう．そこで十分小さな正数 ϵ_o と十分大きな正数 L_o を導入して

$$x_1 = \epsilon_o \sim 0, \tag{6.37}$$

$$x_2 = L_o \sim \infty \tag{6.38}$$

という R 領域の有限のカットオフ (cut off) を導入しよう．すると (6.35) 式から S は

$$S = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{L_o}{\epsilon_o}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{L_o}{\epsilon_o}\right) \tag{6.39}$$

と計算される．ここで S に加速度 κ の依存性がなくなっている．真空状態 $|0_M\rangle$ は慣性系において定義されており，(6.10), (6.11) 式の座標変換の選択により生じた κ 依存性は本来 $|0_M\rangle$ の量子縺れに現れないためである．ここで $\hat{\varphi}$ は質量が零であるため，共形場理論 (conformal field theory, CFT) の知見が使える．例えば光円錐座標 $x^{\pm}$ を別な光円錐座標 $\zeta^{\pm}$ にする共形座標変換において，真空状態 $|0_M\rangle$ は $\zeta^{\pm}$ で記述される CFT の基底状態に写像される．そこで l 及び $\tilde{L}$ を $l \leq \tilde{L}$ を満たすある正数とし，x_o を長さの次元をもつ定数とすると，

$$x^{\pm} = x_o \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\tilde{L}}\left(l - \zeta^{\pm}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\tilde{L}}\zeta^{\pm}\right)}$$

で定義される座標変換を考えよう [64]．この場合 $|0_M\rangle$ は長さ $\tilde{L}$ の円周上の質量零のスカラー場の基底状態 $|0(L)\rangle$ に写像される．そこで $\zeta^{\pm} = \tau_\zeta \pm \zeta$ を定義して，時刻 $\tau_\zeta = 0$ において (6.39) 式を書き直そう．新しい空間座標 ζ は長さ $\tilde{L}$ の円周上を張っている．そして R 領域の ζ 座標系の $[0, l]$ に写像され，L 領域は ζ 座標系の $\left[l, \tilde{L}\right]$ に写像されている．(6.37) 式，(6.38) 式の R のカットオフされた領域 $[\epsilon_o, L_o]$ は，無限小量 ϵ_1, ϵ_2 で指定される ζ 座標系での $[\epsilon_1, l - \epsilon_2]$ という領域に写像される．ここで ϵ_1, ϵ_2 と ϵ_o, L_o には

$$\epsilon_o = x_o \frac{\pi}{\tilde{L}} \frac{\epsilon_2}{\sin\left(\pi \frac{l}{\tilde{L}}\right)}, \tag{6.40}$$

$$L_o = \frac{x_o \tilde{L}}{\pi \epsilon_1} \sin\left(\pi \frac{l}{\tilde{L}}\right) \tag{6.41}$$

という関係がある．この場合 S は状態 $|0(\tilde{L})\rangle$ での $[0, l]$ 領域と $\left[l, \tilde{L}\right]$ 領域の間の量子縺れエントロピーと解釈できる．(6.40) 式，(6.41) 式を (6.39) 式に代入することで S は

$$S = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\tilde{L}}{\pi\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} \sin\left(\pi \frac{l}{\tilde{L}}\right)\right) \tag{6.42}$$

と評価される．R と L の入れ替えに対して量子縺れは不変であるために，ζ 座標系での R 領域を大きさを表すパラメータ l を $\tilde{L} - l$ に置き換えても S は確かに不変になっている.（質量零のスカラー場を CFT として特徴づけるパラメータであるセントラルチャージ (central charge) は右進行波成分に $c = 1$，左進行波成分に $\bar{c} = 1$ となっている．一般のセントラルチャージを持つ CFT に関しては

$$S = \frac{c + \bar{c}}{6} \ln\left(\frac{\tilde{L}}{\pi\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} \sin\left(\pi \frac{l}{\tilde{L}}\right)\right)$$

という公式が成り立つ.）紫外発散のカットオフを $\epsilon = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$ と定義し，(6.42) 式において $\tilde{L} \to \infty$ という極限をとると

$$S = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{l}{\epsilon}\right) \tag{6.43}$$

という結果を得る．この極限では CFT の共形対称性のおかげで，ζ 座標系は慣性系を記述していると解釈できる．そして $|0(\tilde{L})\rangle$ は再び慣性系での真空状態 $|0_M\rangle$ に戻る．無限長の実数空間 $(-\infty, \infty)$ で定義される質量零のスカラー場の真空状態 $|0_M\rangle$ における，$[0, l]$ 領域とその外部領域との間の量子縺れエントロピーは (6.43) 式で与えられる．ここで興味深いのは，慣性座標系で領域を分け

る際の境界カットオフ ϵ はそもそも一様加速度系の u 座標での (6.36) 式の空間積分の体積発散に起因していることである．つまり一様加速度系での赤外発散は慣性系での紫外発散に写像されている．熱輻射のエントロピーは u 座標での体積に比例したが，u 座標系の $(-\infty,\infty)$ 領域を有限の ζ 座標系の $[0,l]$ 領域に押し込める際に，$\zeta=0$ と $\zeta=l$ の近傍でエントロピー密度が発散することが原因である．このため慣性座標系で量子縺れエントロピーは体積に比例する示量性を示さなくなり，むしろ境界近傍から主な寄与を得ることなる．この性質は高次元の場の理論や量子多体系への拡張においても現れ，ブラックホールのエントロピーと同様に S の紫外発散の最大主要項は境界領域の面積に比例することが示される [61]~[66]．以下では $D\geq 3$ として D 次元の平坦な時空において質量零の自由スカラー場 $\hat{\varphi}$ の量子縺れエントロピー S を経路積分を用いて計算してみよう [65]．慣性系での計量は

$$ds^2 = -\left(dx^0\right)^2 + \left(dx^1\right)^2 + \sum_{i=2}^{D-1}(dx^i)^2$$

で与えられる．ここで $x^1=0$ という境界の左右に領域を分け，$x^1\geq|x^0|$ で定義される領域を先と同様に R と呼ぼう．時間座標 x^0 と空間座標の第 1 成分 x^1 に対して

$$x^0 = r\sinh t, \qquad x^1 = r\cosh t$$

と座標変換を定義すると，高次元空間内で x^1 軸方向の一様加速度運動を記述する座標系 (t,r,x^i) を得る．この座標系は領域 R を覆い，計量は

$$ds^2 = -r^2dt^2 + dr^2 + \sum_{i=2}^{D-1}(dx^i)^2. \tag{6.44}$$

と書かれる．この座標系で時間座標 t に対するハミルトニアン演算子を計算すると

$$\hat{H}_R = \int_0^\infty drr\left[\frac{1}{2}\hat{\Pi}_\varphi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{D-1}\left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x^i}\right)^2\right]$$

となることが分かる．ここで $\hat{\Pi}_\varphi$ は $\hat{\varphi}$ の正準共役運動量演算子である．真空状態 $|0_M\rangle$ に対して $1+1$ 次元と同様なウンルー効果の計算を行うと，R 領域に対して

$$\hat{\rho}_R = \operatorname*{Tr}_{x^1<0}\left[|0_M\rangle\langle 0_M|\right] = \frac{e^{-2\pi\hat{H}_R}}{\mathrm{Tr}(e^{-2\pi\hat{H}_R})}$$

という温度 $1/(2\pi)$ の熱的状態を得る．R 領域とその外部領域との間の量子縺れエントロピーは

$$S = -\operatorname*{Tr}_R\left[\hat{\rho}_R\ln\hat{\rho}_R\right]$$

で定義されるが，これは統計力学でよく使われるレプリカ法を用いると形式的に

$$S = \left(1 - n\frac{\partial}{\partial n}\right) \ln \operatorname*{Tr}_R \left[\hat{\rho}_R^n\right]|_{n=1}$$

と書かれる．ここで $\hat{\rho}_R^n$ の n は本来自然数で定義されているが，レプリカ法ではそれを実数にまで拡張して，$\hat{\rho}_R^n$ は n の連続関数とみなす．n が自然数の場合には，$\mathrm{Tr}_R\left[\hat{\rho}_R^n\right]$ は以下のユークリッド経路積分によって表記できることが直接示される．(6.44) 式の計量において $\tau = -it$ と置いて得られる

$$ds_E^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = r^2 d\tau^2 + dr^2 + \sum_{i=2}^{D-1}(dx^i)^2 \tag{6.45}$$

で記述される時空を考える．この時空を n 個用意して時間方向に繋いで生成される周期的多様体 R_n 上で

$$Z(n) = \operatorname*{Tr}_R \left[\hat{\rho}_R^n\right] = \int_{R_n} D\varphi \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^Dx\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] \tag{6.46}$$

という関係が示される．ここで積分測度 $D\varphi$ は $Z(1) = 1$ となるように規格化されている．また経路積分変数 $\varphi(\tau, r, x^i)$ は τ に関して $\varphi(\tau + 2\pi n, r, x^i) = \varphi(\tau, r, x^i)$ という周期性が課せられている．作用の部分を具体的に書くと

$$Z(n) = \int_{R_n} D\varphi \exp\left[-\int d^Dx\left[\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{r}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{r}{2}\sum_{i=2}^{D-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)^2\right]\right]$$

となっている．この経路積分においては作用が発散する寄与は無視できる．作用密度の第 1 項目に $\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2$ という項があるため，作用を発散させないように $r = 0$ の近傍で $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$ が零になる φ の積分配位だけを考えれば良い．これは

$$\varphi(\tau, r = 0, x^i) = \varphi(\tau = 0, r = 0, x^i)$$

を意味するため，場にとっては $r = 0$ で指定される領域は τ の値に依らない．従って $r = 0$ を (τ, r) 座標上の 1 点とみなせる．従って $ds_2^2 = r^2 d\tau^2 + dr^2$ という 2 次元計量において r は極座標系の動径座標であり，τ は角度座標と見なせる．ただし注意が必要なのは，τ は 2π 周期を持たず，代わりに $2\pi n$ 周期を持つ点である．周期が 2π ならば R_n は単純な平面とみなせるが，$2\pi n$ 周期の場合には $r = 0$ が円錐状の特異点 (conical singularity) になっていることを示している．n は特異点周りでの欠損角 $2\pi(1 - n)$ と対応できるため，この段階で n を実数とみなすことは簡単にできる．このような特異点を持つ空間 R_n 上で (6.46) 式の φ の経路積分を定義することにより，S は

$$S = \left(1 - n\frac{\partial}{\partial n}\right) \ln Z(n)_{n=1} \tag{6.47}$$

と書かれることが正当化される．(6.46) 式はガウス型積分であるために簡単に

積分を遂行でき，

$$\ln Z(n) = -\frac{1}{2}\ln \mathrm{Det}(-\nabla^2)$$

と評価される．ここで $\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right)$ は R_n 上でのラプラス演算子 (Laplacian) であり，紫外発散を含んでいる．それを一般座標変換不変な形で正則化するために，ここでは

$$-\frac{1}{2}\ln \mathrm{Det}(-\nabla^2) \to \frac{1}{2}\int_{\epsilon^2}^{\infty}\frac{dT}{T}\left(\mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right] - \mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right]_{n=1}\right)$$

と置きかえる熱核正則化法を採用する [54], [64], [65]．ϵ は長さの次元を持つ紫外発散のためのカットオフである．$\mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right]$ は曲がった空間 R_n での拡散方程式のグリーン関数から計算できる．$G_n(x,x';T)$ を

$$G_n(x,x';0) = \delta^D(x-x')$$

という初期条件を満たす拡散方程式

$$\partial_T G_n(x,x';T) = \nabla_x^2 G_n(x,x';T)$$

の解とすると $\mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right]$ は

$$\mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right] = \int d^D x\, G_n(x,x;T)$$

で与えられる．R_n 上での $G_n(x,x';T)$ の結果は知られており [64], [67]，それを用いると

$$\mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right] = \frac{A_\perp^{(D-2)}}{12}\left(\frac{1}{4\pi T}\right)^{\frac{D}{2}-1}\left(\frac{1}{n}-n\right) + \mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right]|_{n=1} \tag{6.48}$$

という結果を得ることができる．ここで $A_\perp^{(D-2)} = \int dx^2\cdots dx^{D-1}$ は x^1 軸に直交する面の面積であり，R とその外部領域を分ける境界の面積である．(6.48) 式の最後の項の中の $-n$ に比例する項は量子縺れに寄与しないことが分かる．非自明な寄与を与えるのは $\frac{1}{n}$ に比例する項であるが，これは $G_n(x,x;T)$ の評価において図 6.3 のような拡散粒子の軌跡の τ 方向の巻き付きの効果が現れる

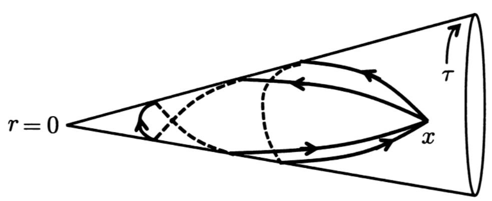


図 6.3 円錐上で元の点に戻る運動をする粒子の軌跡の例．軌跡の円錐への巻き付きが拡散方程式のグリーン関数に非自明な寄与を与える．

ためである．n を 0 に近づける場合を考えると，R_n 上の $r=0$ 周囲の欠損角は 2π に漸近してしまい，τ 方向のコンパクト化の半径が零となる潰れた空間になる．すると時間 T の間に位置 x から x に戻る拡散粒子の巻き付き軌跡の寄与が幾らでも大きくなるために発散する．そのため $G_n(x,x;T)$ 及び $\mathrm{Tr}\left[e^{-T(-\nabla^2)}\right]$ には $n\to 0$ で発散する項が必然的に現れる．これが $\frac{1}{n}$ に比例する項である．(6.48) 式を (6.47) 式に代入して ϵ を小さくすると，

$$S \sim \frac{A_{\perp}^{(D-2)}}{4}\frac{2}{3(D-2)}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon^2}\right]^{D/2-1} \tag{6.49}$$

という最大主要項を得る．ちなみに $D=2$ として同様の経路積分での評価を行うと，赤外発散も同時におこるため $\epsilon\to 0$ の極限での S の発散項は赤外発散のカットオフ L_{IR} に依存した

$$S \sim \frac{1}{6}\ln\left(\frac{L_{IR}}{\epsilon}\right)$$

という対数発散となり，(6.39) 式の結果と整合している．なお境界面積に比例する (6.49) 式の S はブラックホールを考えた場合にそのエントロピーの量子補正とみなせるという議論もなされている [63], [65]．

6.5 真空状態のネガティビティ

ここでは質量零のスカラー場 $\hat{\varphi}$ の真空状態 $|0_M\rangle$ におけるネガティビティΞ について述べる．量子縺れエントロピー S は純粋状態でなければ量子縺れの指標ではないため，ある有界な空間とその補空間の間の量子縺れしか扱えなかった．しかし Ξ は混合状態の量子縺れも扱えるため，離れた 2 つの有界領域 A,B において定義される $\hat{\varphi}$ の各々の局在調和振動子モードの間の量子縺れを扱うことができる．$\xi_K(x),\eta_K(x)$ $(K=A,B)$ を各々の領域だけで非零の値をとり，その外部では零になる次元を持たない実関数にとる．そして

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_K(x)\partial_x\eta_{K'}(x)dx = \delta_{KK'}$$

という規格化条件を満たすとする．この時

$$\hat{q}_K = \int_{-\infty}^{\infty}\xi_K(x)\hat{\Pi}_+(x)dx, \qquad \hat{p}_K = \int_{-\infty}^{\infty}\eta_K(x)\hat{\Pi}_+(x)dx$$

によって定義されるエルミート演算子 $\hat{q}_K,\hat{p}_K$ も次元を持たず，

$$[\hat{q}_K,\hat{p}_{K'}] = i\delta_{KK'}, \qquad [\hat{q}_K,\hat{q}_{K'}] = 0, \qquad [\hat{p}_K,\hat{p}_{K'}] = 0$$

という交換関係を満たす．この $(\hat{q}_A,\hat{p}_A)$ で記述される A 領域の場の局在モードと $(\hat{q}_B,\hat{p}_B)$ で記述される B 領域の場の局在モードとの間の量子縺れを考えよう．それぞれの調和振動子に対して

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q}_A + i\hat{p}_A\right), \qquad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q}_B + i\hat{p}_B\right)$$

という演算子を定義すると $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = 1$ を満たす．ここで $\hat{a}|0_M\rangle \neq 0, \hat{b}|0_M\rangle \neq 0$ となるため，解釈には注意が必要である．$\hat{a}$ と $\hat{b}$ は通常の平面波モード関数で定義できる $\hat{a}^+_\omega, \hat{a}^-_\omega$ の線形重ね合わせで書けず，$\hat{a}^{+\dagger}_\omega, \hat{a}^{-\dagger}_\omega$ との線形重ね合わせの寄与も含まれる．

$|0_M\rangle$ はガウス状態であるためネガティビティΞは $\hat{q}_A, \hat{p}_A, \hat{q}_B, \hat{p}_B$ の 2 点相関関数から計算される．今のモデルにはスケール不変性があるため，A と B の間の距離を変化させた時の Ξ の一般的振る舞いを論じることができる．$\xi(l,x)$ と $\eta(l,x)$ を $[-l/2, l/2]$ の間だけ非零をとる実数関数で

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(l,x)\partial_x \eta(l,x) dx = 1$$

を満たすとしよう．そしてこの関数を使って

$$\xi_A(x) = \xi(l, x + L/2), \qquad \eta_A(x) = \eta(l, x + L/2),$$
$$\xi_B(x) = \xi(l, x - L/2), \qquad \eta_B(x) = \eta(l, x - L/2)$$

ととる．l は調和振動子の局在サイズであり，これが唯一の $\xi(l,x)$ と $\eta(l,x)$ が持っている長さ次元のパラメータとしよう．また L は A と B の間の距離を意味している．系のスケール不変性から共分散行列 M の成分のうち $\langle\hat{q}_A\hat{q}_A\rangle, \langle\hat{q}_A\hat{p}_A\rangle + \langle\hat{p}_A\hat{q}_A\rangle, \langle\hat{p}_A\hat{p}_A\rangle$（及び $\langle\hat{q}_B\hat{q}_B\rangle, \langle\hat{q}_B\hat{p}_B\rangle + \langle\hat{p}_B\hat{q}_B\rangle, \langle\hat{p}_B\hat{p}_B\rangle$）は L や l の依存性を全く持たない定数になる．また量子縺れに寄与する A と B を跨ぐ成分の $\langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle, \langle\hat{q}_A\hat{p}_B\rangle, \langle\hat{p}_A\hat{q}_B\rangle, \langle\hat{p}_A\hat{p}_B\rangle$ は L/l だけの関数とみなせる．例えば $\langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(l, x_A + L/2)\xi(l, x_B - L/2) \\ &\qquad \times \langle 0_M|\hat{\Pi}_+(x_A)\hat{\Pi}_+(x_B)|0_M\rangle dx_A dx_B \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(l, x_A)\xi(l, x_B)}{4\pi\left(x_A - x_B - L\right)^2} dx_A dx_B\end{aligned}$$

と計算されるが，ここで

$$x_A = lX_A, \qquad x_B = lX_B$$

という無次元化のスケール変換をしよう．$\xi(l,x)$ は長さのスケールを l しか含まないため次元解析から

$$\xi(l, lX) = \xi(1, X)$$

という性質があることが分かる．従って $\langle\hat{q}_A\hat{q}_B\rangle$ は

$$\langle \hat{q}_A \hat{q}_B \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(1,X_A)\xi(1,X_B)}{4\pi\left(X_A - X_B - L/l - i0\right)^2} dX_A dX_B$$

と書けて確かに L/l だけの関数になっていることが確認できる．l を固定した $L \to \infty$ の極限では $\langle \hat{q}_A \hat{q}_B \rangle, \langle \hat{q}_A \hat{p}_B \rangle, \langle \hat{p}_A \hat{q}_B \rangle, \langle \hat{p}_A \hat{p}_B \rangle$ は零となり，部分転置を施した共分散行列 M^{T_A} の固有値は M の固有値と一致する．従って全て正の値をとる．当然 $\Xi = 0$ となり，量子縺れは存在しない．A と B を近づけて L を小さくしても，しばらくの間は M^{T_A} の固有値には負の値が現れない．ある閾値 $L = L_c$ において M^{T_A} の零固有値が生じ，そこから L を小さくしていくと M^{T_A} は負の固有値を持つようになり，Ξ は増加していく．同様に L を固定して l を小さくしていくと L/l は大きくなるため，$\langle \hat{q}_A \hat{q}_B \rangle, \langle \hat{q}_A \hat{p}_B \rangle, \langle \hat{p}_A \hat{q}_B \rangle, \langle \hat{p}_A \hat{p}_B \rangle$ は全て零に近づく．従って最初 l が十分に大きく，Ξ が正の値をとっていたとしても，L を固定しながら l を小さくしていくとある閾値 $l = l_c$ 以下では $\Xi = 0$ となる．ここで注意が必要なのは，例え $\Xi = 0$ となっても部分系の 2 つの調和振動子の間の量子縺れが零となっているだけで，2 体の古典相関は残っていることである．またこの古典相関は真空状態の多体的量子縺れが起源となっている点も強調されるべきである．もし真空状態が各点の純粋状態の積で書ける因子化された状態ならば，決してこの古典相関も生まれない．今 l を固定して A と B の距離 L を十分大きくした時に AB 間の Ξ が零になったとしよう．しかしこの場合でも A と B の間に空間的に重ならないように等間隔に並べられた十分多数の調和振動子 $C_1, C_2, \cdots, C_N$ を考えれば隣接する 2 つの調和振動子 $C_n\, C_{n+1}$ 間の Ξ は零ではなくなる．A はその隣の調和振動子 C_1 と量子的に縺れており，その C_1 はその隣の C_2 と縺れ，最後の C_N はその隣の B と縺れている．従って $A, C_1, C_2, \cdots, C_N, B$ の合成系には多体的な量子縺れが維持されている．そして $C_1, C_2, \cdots, C_N$ の自由度に対して部分トレースをとって得られる A と B の縮約状態において量子縺れが零になり，古典相関だけが残る構造になっている．

6.6 ウンルー効果とブラックホール

電荷を持たない 4 次元球対称ブラックホールの計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_h}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_h}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

で与えられる．r_h はブラックホールの半径である．この計量には地平面 $r = r_h$ にみかけの特異点が現れているが，

$$t = 2r_h \sqrt{\frac{r}{r_h} - 1}\, e^{\frac{r - r_h}{2r_h}} \sinh\left(\frac{\tau}{2r_h}\right), \tag{6.50}$$

$$x = 2r_h \sqrt{\frac{r}{r_h} - 1}\, e^{\frac{r - r_h}{2r_h}} \cosh\left(\frac{\tau}{2r_h}\right) \tag{6.51}$$

というクルスカル座標系 (Kruskal coordinates) を使うと計量は

$$ds^2 = \frac{r_h}{r} e^{-\frac{r-r_h}{r_h}} \left(-dt^2 + dx^2\right) + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

に変換されて，地平面上でも計量は発散しなくなる．ここで十分大きなブラックホール ($r_h \sim \infty$) を考えると地平面での時空曲率は零に漸近することが知られている．

$$R^2, \quad R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \quad R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = O\left(\frac{1}{r_h^4}\right) \to 0.$$

この極限では地平面近傍 ($\left|\frac{r-r_h}{r_h}\right| \ll 1$) でかつ，小さな立体角が覆う領域 ($\theta \sim \pi/2, \phi \sim 0$) を考えると地平面に平行な方向に y, z 座標を導入できて

$$r^2 d\Omega^2 \sim dy^2 + dz^2$$

と近似できる．従って計量全体は

$$ds^2 \sim -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

となり，ミンコフスキー計量で近似的に記述できるようになる．またブラックホール時空上で $\hat{\varphi}$ を考えると，そのブラックホール輻射の熱平衡状態を記述するハートル–ホーキング状態 (Hartle–Hawking state) [68] は無限大サイズのブラックホールの場合にミンコフスキー真空 $|0_M\rangle$ に一致する．(6.50), (6.51) 式から

$$x^2 - t^2 = 4r_h^2 \left(\frac{r}{r_h} - 1\right) e^{\frac{r-r_h}{r_h}}$$

という関係があることから，$\epsilon_r \ll r_h$ として $r = r_h + \epsilon_r$ という軌道の加速度 κ は $\kappa \sim (4r_h\epsilon_r)^{-1/2}$ で与えられる．従ってウンルー効果からブラックホール外部の $r = r_h + \epsilon_r$ という位置に固定された測定機は

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \sim \frac{1}{4\pi\sqrt{r_h\epsilon_r}}$$

という温度の熱浴を観測することになる．地平面直上 ($r_h\epsilon_r \to 0$) の極限では T は発散するため超弦理論等の量子重力の効果をこの測定機は観測すると考えられている．但しウンルー効果の解析の範囲では自由落下する測定機は地平面を何も観測することなく通過することが示せるため，この議論だけから地平面自体の記述にプランクスケールの物理が必要であるという結論は出ないことを強調しておこう．

第 7 章
ホーキング輻射と量子情報

7.1 ブラックホール形成と動的鏡モデル

球対称衝撃波の重力崩壊過程におけるブラックホール形成とホーキング輻射の生成は，それを単純化した空間 1 次元の動的鏡モデル (moving mirror model) で本質的な側面は記述可能であることが知られている [54], [64], [69]．まず最初に平坦な時空において球座標系 (T, r, θ, ϕ) を考えると，計量は

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{7.1}$$

と書かれる．ここで $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ である．この 4 次元時空上で質量零の実スカラー場 Φ を考え，その球対称解 $\Phi(T, r)$ に注目しよう．これは (7.1) 式から

$$\left(\partial_T^2 - \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right)\right)\Phi(T, r) = 0 \tag{7.2}$$

という運動方程式を満たす．場を

$$\Phi(T, r) = \frac{\varphi(T, r)}{r} \tag{7.3}$$

と定義しなおすと，(7.2) 式はちょうど平坦な 2 次元時空の質量零スカラー場 $\varphi(T, r)$ の運動方程式に一致する．

$$\left(\partial_T^2 - \partial_r^2\right)\varphi(T, r) = 0.$$

ここで重要なのは $r = 0$ でもとの 4 次元場 $\Phi(T, r)$ が発散しないために

$$\varphi(T, 0) = 0$$

という境界条件が要請される点である．これは 2 次元空間の $r = 0$ という地点に完全反射の鏡が存在することを意味している．

次に無限遠方から光速で厚みが零である球対称衝撃波が $r = 0$ に向かって潰

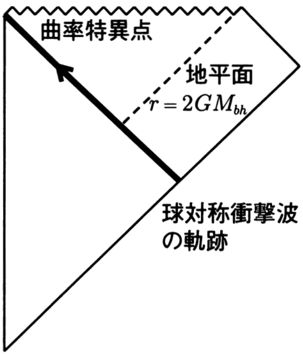


図 7.1　球対称な衝撃波の重力崩壊を表すペンローズ図.

れてくるとしよう．図 7.1 ではこの過程のペンローズ図 (Penrose diagram) を描いた．衝撃波が通過する前までは (7.1) 式で記述される平坦な時空領域であるが，通過後の領域は衝撃波のエネルギーで決まる質量 M_{bh} のブラックホールの時空になる．その計量は

$$ds^2 = -Fdt^2 + \frac{dr^2}{F} + r^2 d\Omega^2$$

で与えられる．ここで F は

$$F = 1 - \frac{r_h}{r}$$

で与えられる．重力定数を G として地平面の半径は $r_h = 2GM_{bh}$ である．ここで動径座標 r に代わる座標 x を $\frac{dr}{dx} = F$ を満たすものとして導入しよう．地平面外部領域 ($r > 2GM_{bh}$) において r から x への座標変換は具体的に

$$x = r + r_h \ln\left(\frac{r}{r_h} - 1\right) \tag{7.4}$$

となることが分かる．ここで (7.4) 式を逆に解くことにより関数 $r = r(x)$ を定義しよう．この関数を用いると衝撃波の軌跡を跨ぐ時空領域も覆う座標系 (t, x, θ, ϕ) を考えることができる．まず $x^{\pm} = t \pm x$ とし，潰れていく衝撃波の軌跡を $x^+ = x_s$ としよう．ここで F を x 座標の関数 $F(x)$ として表示すると，衝撃波通過後のブラックホール領域 $(x^+ > x_s)$ の計量は

$$ds^2 = F(x)\left(-dt^2 + dx^2\right) + r\,(x)^2\, d\Omega^2 \tag{7.5}$$

で与えられ，衝撃波通過前の平坦領域 $(x^+ < x_s)$ の計量は

$$ds^2 = F\left(\frac{x_s - x^-}{2}\right)\left(-dt^2 + dx^2\right) + \left(\frac{x^+ - f(x^-)}{2}\right)^2 d\Omega^2 \tag{7.6}$$

で与えられる．ここで $f(x^-)$ は

$$x^- = f - \frac{1}{\kappa_{bh}} \ln\left(\kappa_{bh}\left(x_h - f\right)\right) \tag{7.7}$$

を逆に解いて得られる x^- の関数とし，定数 x_h, κ_{bh} は

$$x_h = x_s - 2r_h, \qquad \kappa_{bh} = \frac{1}{2r_h} \tag{7.8}$$

で与えられている．(7.4), (7.7) 式から $x^+ = x_s$ において

$$r\left(\frac{x_s - x^-}{2}\right) = \frac{x_s - f(x^-)}{2}$$

が成り立つことが保証されるため，(7.5) 式の外部計量と (7.6) 式の内部計量は確かに $x^+ = x_s$ で連続になっている．内部領域において $x^\pm$ と (7.1) 式の座標系 (T, r) とは

$$T = \frac{1}{2}\left(x^+ + f(x^-)\right), \qquad r = \frac{1}{2}\left(x^+ - f(x^-)\right)$$

で結ばれている．この重力崩壊過程を記述する時空上の量子場は時空の曲率によって励起される．そしてその結果としてブラックホールから温度

$$T_{bh} = \frac{\kappa_{bh}}{2\pi} = \frac{1}{8\pi G M_{bh}} \tag{7.9}$$

の熱輻射が出ていることが示される [54]．これが**ホーキング輻射**である．またブラックホールの質量エネルギーをブラックホールの内部エネルギーと解釈して熱力学の第 1 法則

$$dS_{bh} = \frac{dM_{bh}}{T_{bh}}$$

を適用すると，ブラックホール自身もエントロピー（**ブラックホールエントロピー**）を持っていることが分かり，その大きさは地平面の面積 $A_{bh} = 4\pi r^2 h$ を $4G$ で割ったものに等しいことが示される．

$$S_{bh} = \frac{A_{bh}}{4G}.$$

原点 $r = 0$ にある φ にとっての鏡の軌跡は新しい座標系で

$$x^+ = f(x^-)$$

という式で表される．まだ衝撃波が遠くにある過去の領域 $(x^- \sim -\infty)$ では (7.7) 式から

$$f(x^-) = x^-$$

と近似できる．従って新しい座標系でも鏡の軌跡は $x = 0$ となり，鏡は止まって見える．しかし時間が経って $x^- \sim \infty$ となると，(7.7) 式は

$$x^- \sim x_h - \frac{1}{\kappa_{bh}} \ln\left|\kappa_{bh}\left(x_h - f\right)\right|$$

と近似できるようになり，$f(x^-)$ は

$$f(x^-) \sim x_h - \frac{1}{\kappa_{bh}} \exp\left[-\kappa_{bh}\left(x^- - x_h\right)\right]$$

と評価することができる．従って空間無限遠方 $(r \sim \infty)$ の時間座標 t において十分に未来 $(x^- \sim \infty)$ になると，鏡は加速し続けて $x^+ = x_h$ という左進行光測地線に漸近するようになる．時空に存在する曲率を無視して，この鏡の運動の特徴のみを取り出したのが 2 次元時空の動的鏡モデル (moving mirror model) である．以降ではこのモデルで φ を量子化して，そのホーキング輻射や関連する量子情報の議論を行う．

7.2　2 次元動的鏡モデル

ここでは改めて 2 次元動的鏡モデルを定義しよう．平坦な 2 次元時空で質量零のスカラー場 $\hat{\varphi}$ を考える．$x^\pm = t \pm x$ として，この場を完全反射する鏡が一般の単調増加関数 $f(x)$ を用いて

$$x^+ = f\left(x^-\right)$$

の関係で定まる軌道を運動しているとしよう．$\hat{\varphi}$ は鏡の右側領域に存在し，$x = \infty$ の空間無限遠方から左進行波 $\hat{\varphi}_{in}\left(x^+\right)$ が鏡に入射すると，反射されて右進行波 $\hat{\varphi}_{out}\left(x^-\right)$ となる．鏡の位置で場が消える境界条件を課すと運動方程式 $\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\hat{\varphi} = 0$ の解は

$$\hat{\varphi}(t,x) = \hat{\varphi}_{in}\left(x^+\right) - \hat{\varphi}_{in}\left(f\left(x^-\right)\right) \tag{7.10}$$

と解ける．従って反射波は

$$\hat{\varphi}_{out}\left(x^-\right) = \hat{\varphi}_{in}\left(f\left(x^-\right)\right) \tag{7.11}$$

で与えられることが分かる．入射波 $\hat{\varphi}_{in}\left(x^+\right)$ を平面波展開して量子化すると $\left[\hat{a}_\omega, \hat{a}^\dagger_{\omega'}\right] = \delta\left(\omega - \omega'\right), \left[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}\right] = 0$ を満たす生成消滅演算子を用いて

$$\hat{\varphi}_{in}(x^+) = \int_0^\infty \left(\hat{a}_\omega e^{-i\omega x^+} + \hat{a}^\dagger_\omega e^{i\omega x^+}\right) \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}}$$

と書かれる．入射波の真空状態 $|0_{in}\rangle$ は $\hat{a}_\omega|0_{in}\rangle = 0$ によって定義される．反射波 $\hat{\varphi}_{out}\left(x^-\right)$ も同様に $\left[\hat{b}_\omega, \hat{b}^\dagger_{\omega'}\right] = \delta\left(\omega - \omega'\right), \left[\hat{b}_\omega, \hat{b}_{\omega'}\right] = 0$ を満たす生成消滅演算子を用いて

$$\hat{\varphi}_{out}(x^-) = \int_0^\infty \left(\hat{b}_\omega e^{-i\omega x^-} + \hat{b}^\dagger_\omega e^{i\omega x^-}\right) \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}}$$

と書かれる．反射波 $\hat{\varphi}_{out}(x^-)$ の真空状態 $|0_{out}\rangle$ は $\hat{b}_\omega|0_{out}\rangle = 0$ によって定義される．

ブラックホール形成とそのホーキング輻射生成に対応する鏡の軌道は，κ を

正の実数として

$$f_{gc}(x^-) = -\frac{1}{\kappa}\ln\left(e^{-\kappa x^-}+1\right) \tag{7.12}$$

でモデル化できる．この逆関数 $g_{gc}(x^+)$ は

$$g_{gc}(x^+) = -\frac{1}{\kappa}\ln\left(e^{-\kappa x^+}-1\right) \tag{7.13}$$

で与えられる．無限の過去（$t\sim-\infty$ つまり $x^-\sim-\infty$）では $f_{gc}(x^-)=x^-$ となるために鏡は静止している．時間が経つと鏡は左方向に加速しだし，無限の未来には $f_{gc}(x^-)\sim-\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa x^-}$ と近似され，鏡は $x^+=0$ という光測地線に漸近する．

一般の鏡の軌跡 $x^+=f(x^-)$ において入射状態を真空状態 $|0_{in}\rangle$ にとった時の反射波のエネルギーフラックス $\hat{T}_{--}(x^-)=:(\partial_{x^-}\hat{\varphi}_{out}(x^-))^2:$ の期待値は

$$\begin{aligned}\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\Big[&\langle 0_{in}|\partial_{x^-}\hat{\varphi}_{out}\left(x^-+\epsilon\right)\partial_{x^-}\hat{\varphi}_{out}\left(x^-\right)|0_{in}\rangle \\ &-\langle 0_{out}|\partial_{x^-}\hat{\varphi}_{out}\left(x^-+\epsilon\right)\partial_{x^-}\hat{\varphi}_{out}\left(x^-\right)|0_{out}\rangle\Big]\end{aligned} \tag{7.14}$$

によって計算できる．(7.11) 式から

$$\langle 0_{in}|\partial_{x^-}\hat{\varphi}_{out}\left(x_1^-\right)\partial_{x^-}\hat{\varphi}_{out}\left(x_2^-\right)|0_{in}\rangle = -\frac{\partial_{x^-}f(x_1^-)\partial_{x^-}f(x_2^-)}{4\pi\left(f(x_1^-)-f(x_2^-)-i0\right)^2} \tag{7.15}$$

が得られるが，これを (7.14) 式に代入すると

$$\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle = -\frac{1}{24\pi}\left[\frac{\partial_{x^-}^3 f(x^-)}{\partial_{x^-}f(x^-)}-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial_{x^-}^2 f(x^-)}{\partial_{x^-}f(x^-)}\right)^2\right] \tag{7.16}$$

という公式が得られる．これに (7.12) 式の $f_{gc}(x^-)$ を代入すると，前節の議論から温度 $T=\kappa/(2\pi)$ ホーキング輻射のフラックスが出てくると期待できる．実際鏡の軌跡が十分に $x^+=0$ に漸近する $x^-\gg 1/\kappa$ という領域において

$$\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle \sim \frac{\pi}{12}T^2 \tag{7.17}$$

という温度 T の熱輻射のエネルギーフラックスが鏡から放出されていることが直接計算から確認できる．

7.3 ホーキング輻射の量子縺れ

(7.12) 式の軌跡で特徴的なのは全ての入射波が鏡によって反射するわけではないことである．図 7.2 の左側のように $x^+>0$ の領域の入射波成分 $\hat{\varphi}_{fall}(x^+)$ は鏡にあたらず，そのまま左側領域へと進行をする．これは先の重力崩壊の対

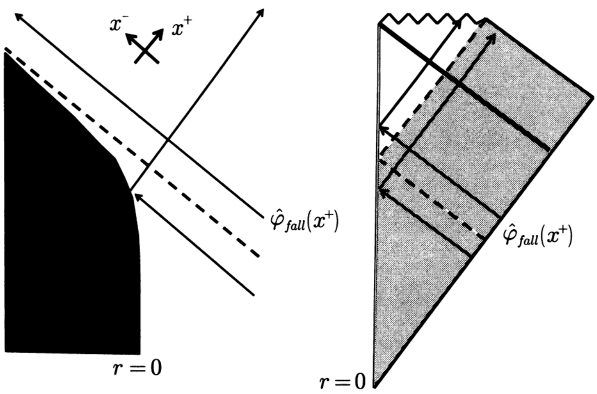


図 7.2 ホーキング輻射を与える動的鏡モデル．左が時空上での鏡の軌跡を図示し，右が対応する 4 次元重力崩壊のペンローズ図を与える．ペンローズ図の灰色で塗られた地平面外部領域が動的鏡モデルで記述される．

応でいうと，図 7.2 右側のように地平面にそのまま落下してブラックホールに吸収されてしまう成分になっている．

そこでホーキング輻射が安定に放出する領域に注目して，鏡の軌道が $-\infty < x^- < \infty$ において厳密に

$$x^+ = f_{bh}(x^-) = -\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa x^-} \tag{7.18}$$

で与えられる場合を詳しくみてみよう．この逆関数 $g_{bh}(x^+)$ は $-\infty < x^+ < 0$ で定義され，

$$g_{bh}(x^+) = -\frac{1}{\kappa}\ln\left(-\kappa x^+\right) \tag{7.19}$$

で与えられる．(7.16) 式に $f_{bh}(x^-)$ を代入すると任意の x^- に対して

$$\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle = \frac{\pi}{12}T^2$$

が成り立ち，過去から未来まで温度 $T = \kappa/(2\pi)$ のホーキング輻射が鏡から出続けている状況を記述していることが確認できる．時間を遡らせると反射波成分の平面波モード関数 $e^{-i\omega x^-}$ は $e^{-i\omega g_{bh}(x^+)}$ に置き換わる．従って反射波成分 $\hat{\varphi}_{out}\,(x^-)$ は

$$\hat{\varphi}_{out}(g_{bh}(x^+)) = \Theta(-x^+)\int_0^\infty \left(\hat{b}_\omega e^{-i\omega g_{bh}(x^+)} + \hat{b}_\omega^\dagger e^{i\omega g_{bh}(x^+)}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}}$$

という入射波成分に対応するため，全入射波 $\hat{\varphi}_{in}(x^+)$ は

$$\hat{\varphi}_{in}(x^+) = \hat{\varphi}_{out}(g_{bh}(x^+)) + \hat{\varphi}_{fall}(x^+)$$

と書ける．ここで注目すべき点は $e^{-i\omega g_{bh}(x^+)}$ が (7.19) 式から $-\infty < x^+ < 0$ の領域のウンルーモード関数に一致していることである．

$$e^{-i\omega g_{bh}(x^+)} = \left(-\kappa x^+\right)^{i\frac{\omega}{\kappa}}. \tag{7.20}$$

そこで $0 < x^+ < \infty$ の領域でも (7.20) 式のモードと対になるウンルーモード関数で $\hat{\varphi}_{fall}(x^+)$ を展開して

$$\hat{\varphi}_{fall}(x^+) = \Theta(x^+) \int_0^\infty \left(\hat{c}_\omega \left(\kappa x^+\right)^{-i\frac{\omega}{\kappa}} + \hat{c}_\omega^\dagger \left(\kappa x^+\right)^{i\frac{\omega}{\kappa}}\right) \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}}$$

とし，$\left[\hat{c}_\omega, \hat{c}_{\omega'}^\dagger\right] = \delta\left(\omega - \omega'\right), \left[\hat{c}_\omega, \hat{c}_{\omega'}\right] = 0$ を課して量子化しよう.（なおここで前章の $\hat{b}_\omega, \hat{c}_\omega$ とは表記上入れ替わっていることに注意である.）以降ではホーキング輻射を含む $\hat{\varphi}_{out}\left(x^-\right)$ の自由度を B と呼び，$\hat{\varphi}_{fall}(x^+)$ の自由度を C と呼ぶことにする．このような量子化を行うと入射波の真空状態 $|0_{in}\rangle$ はウンルー効果の時と同様に

$$|0_{in}\rangle \propto \exp\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{b}_\omega^\dagger \hat{c}_\omega^\dagger d\omega\right) |0_{out}\rangle_B |0\rangle_C$$

と書けることが分かる．ここで $|0_{out}\rangle_B$ は反射波の普通の真空状態であるが，$|0\rangle_C$ は $\hat{c}_\omega|0\rangle_C = 0$ で定義されるリンドラー真空状態である．またウンルー効果の時と同様に $|n\left(\omega\right)_{out}\rangle_B$, $|n\left(\omega\right)\rangle_C$ を B, C の角振動数 ω の n 個の粒子状態とすると，

$$|0_{in}\rangle \propto \prod_\omega \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}n(\omega)} |n\left(\omega\right)_{out}\rangle_B |n\left(\omega\right)\rangle_C\right) \tag{7.21}$$

とも書ける．$|n\left(\omega\right)_{out}\rangle_B$ は散乱後の真空状態 $|0_{out}\rangle_B$ に生成演算子 $\hat{b}_\omega^\dagger$ を n 回かけて作られる n 個の粒子の通常の状態である．B の縮約状態は

$$\hat{\rho}_B = \operatorname*{Tr}_C\left[|0_{in}\rangle\langle 0_{in}|\right] \propto \prod_\omega \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}n(\omega)} |n\left(\omega\right)_{out}\rangle_B \langle n\left(\omega\right)_{out}|_B\right)$$

というギブス状態で与えられる．従って温度 $T = \kappa/(2\pi)$ で実粒子が熱的に励起していることが確認できる．この粒子の集まりが (7.17) 式のフラックスを与えたホーキング輻射である．以降ではホーキング輻射を構成している 1 つ 1 つの粒子をホーキング粒子と呼ぼう．前節でみたように鏡の運動は時空の大域的構造変化を反映していた．そのため重力崩壊におけるホーキング輻射生成は仮想粒子であるリンドラー粒子が時空曲率からエネルギーをもらってホーキング粒子になる過程とも解釈できる．ホーキング輻射の量子縺れは (7.21) 式で記述される．ここで興味深いのはホーキング粒子と量子的に縺れている相手は実粒子ではなく，昔自分がリンドラー粒子だったときに既に量子的に縺れていた $\hat{\varphi}_{fall}(x^+)$ の仮想リンドラー粒子という点である．C の縮約状態 $\hat{\rho}_C = \mathrm{Tr}_B\left[|0_{in}\rangle\langle 0_{in}|\right]$ は局所的真空状態のままであり，C のエネルギーは零であって零点振動以外何も存在していない．ウィルチェック (Wilczek) [69] によって強調されたように，動的鏡モデルではホーキング輻射を記述する混合状態 $\hat{\rho}_B$ は C の零点振動によっ

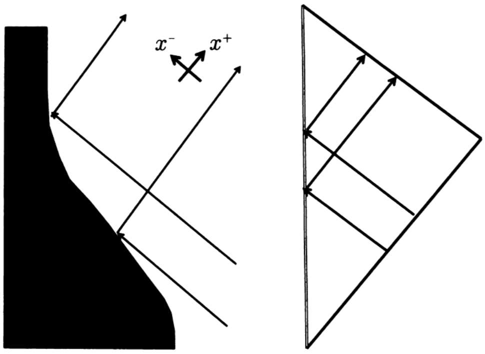


図 7.3　ブラックホール蒸発を記述する動的鏡モデル．左が鏡の時空での軌跡の図示であり，右が対応するペンローズ図である．全ての入射波は鏡によって反射される．

て純粋化 (purification) されている．この事実は実際のブラックホール蒸発過程に対してもホーキング輻射と量子的に縺れて純粋状態をつくるパートナーがエネルギーを持っている必要はないという示唆を与えている．

これまではホーキング輻射放出による反作用はモデルに取り入れられていない．実際にはホーキング輻射によってエネルギーを持ちだされることでブラックホールの質量が減少し続ける．温度は (7.9) 式で与えられるため，質量 M_{bh} が小さくなるとともに出てくる輻射は高温となり，輻射によって持ちだされるエネルギーも大きくなる．従って蒸発過程の最終段階ではブラックホールは爆発的な輻射放出とともに完全消滅する可能性もある．そのシナリオを動的鏡モデルの範疇で量子情報理論的に解析してみよう．

鏡がある長い一定期間ホーキング輻射を放出した後，減速の結果静止して輻射を出さなくなる場合を考える．その場合鏡の軌跡を定める関数 $f(x^-)$ は $-\infty < x^- < \infty$ で単調増加関数であり，$f(\pm\infty) = \pm\infty$ を満たす．$f(x^-)$ の例としては $h \gg 1/\kappa$ を満たすパラメータ h を含んだ

$$f_{be}(x^-) = -\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa x^-} + \frac{1}{\kappa}\ln\left(1 + e^{\kappa\left(x^- - h\right)}\right), \tag{7.22}$$

という関数が挙げられる．このような場合は図 7.3 左側のように $\hat{\varphi}_{fall}(x^+)$ を必要とせず，全ての入射波 $\hat{\varphi}_{in}(x^+)$ は鏡に散乱されて反射波 $\hat{\varphi}_{out}(x^-)$ となり，$x^+ = \infty$ の領域に向かう．この時空のペンローズ図も図 7.3 右側のように変化する．この系のダイナミクスは単純であり，(7.11) 式に則ってモード関数が引き延ばされているだけに過ぎない．従って $\hat{\varphi}_{out}(x^-)$ の性質を $\hat{\varphi}_{in}(x^+)$ に引き戻して解析することが常に可能である．$x^+ = \infty$ の直線は x^- で座標が張られているが，そのうち $\left[x_1^-, x_2^-\right]$ で指定される領域とその外部領域の間の $\hat{\varphi}_{out}(x^-)$ の量子縺れエントロピー S も，時間を遡って入射波 $\hat{\varphi}_{in}(x^+)$ に焼き直した S で評価することが可能である．$\left[x_1^-, x_2^-\right]$ は $x^- = -\infty$ の過去に位置する $\left[x_1^+, x_2^+\right]$ に引き戻される．ここで $x_{1,2}^+$ は $x_{1,2}^+ = f(x_{1,2}^+)$ の関係にある．

S を定義するために必要な x_1^- での幅 ϵ_1^- のカットオフ領域 $\left[x_1^-, x_1^- + \epsilon_1^-\right]$ は，$\left[x_1^+, x_1^+ + \partial f(x_1^-)\epsilon_1^-\right]$ に引き戻されるため，その幅は $\epsilon_1^+ = \partial f(x_1^-)\epsilon_1^-$ となる．同様に x_2^- でのカットオフ領域の幅は $\epsilon_2^+ = \partial f(x_2^-)\epsilon_2^-$ に引き戻される．前章の (6.43) 式より，入射波での S は

$$S = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{\left(x_2^+ - x_1^+\right)^2}{\epsilon_1^+ \epsilon_2^+} \right)$$

で与えられるため，反射波での量子纏れエントロピーは

$$S = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{\left(f(x_2^-) - f(x_1^-)\right)^2}{\partial f(x_2^-) \partial f(x_1^-) \epsilon_1^- \epsilon_2^-} \right) \tag{7.23}$$

と評価される [64]．またしばしば $\hat{\varphi}_{out}(x^-)$ の真空状態での S を差し引くことで発散を取り除いた

$$S_{ren} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{\left(f(x_2^-) - f(x_1^-)\right)^2}{\partial f(x_2^-) \partial f(x_1^-) \left(x_2^- - x_1^-\right)^2} \right), \tag{7.24}$$

という繰りこまれた量子纏れエントロピーも使用される [64]．これは真空状態に比べて考えている領域とその外部の間にどのくらい多くの量子纏れが存在するかを表す指標である．

$\left[x_1^-, x_2^-\right]$ がホーキング輻射を出している領域に含まれる場合には $f(x^-) \sim -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa x^-}$ と近似して良い．従ってその場合には

$$S = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{4 \sinh^2 \left(\frac{\kappa}{2} \left(x_2^- - x_1^-\right)\right)}{\kappa^2 \epsilon_1^- \epsilon_2^-} \right)$$

と S は評価できる．また $\left[x_1^-, x_2^-\right]$ が大量のホーキング輻射を含む場合 $(x_2^- - x_1^- \gg \frac{1}{\kappa})$ に S は

$$S \sim \frac{\kappa}{12} \left(x_2^- - x_1^-\right) \gg 1$$

と計算されるため，$\left[x_1^-, x_2^-\right]$ の中のホーキング輻射は確かに大量の量子纏れを外部と共有していることが分かる．この纏れのパートナーは (7.21) 式に現れた仮想粒子のリンドラー粒子である．ただし鏡が減速をする以降には (7.21) 式のリンドラー粒子も鏡に当たって反射波になる．ただしリンドラー粒子全てがエネルギーを獲得して輻射を構成する実粒子になるわけではない．鏡が静止した後に鏡と散乱するリンドラー成分に関してはエネルギーを持たない零点振動のまま鏡から戻ってくる．従ってホーキング輻射と量子的に纏れるのは鏡の減速時以降に出てくる輻射及び輻射の生成停止後に鏡から出力される零点振動ということになる．$x^+ = \infty$ の未来の領域では $\hat{\varphi}_{out}(x^-)$ の状態は純粋状態になっており，ユニタリティが保たれている [69], [70]．

動的鏡モデルは確かに大きなブラックホールのホーキング輻射生成を的確に

表現している．ただ蒸発が進んでプランクスケール程度の小さなブラックホールになった場合には，無視をしている曲率の効果が大きくなると考えられている．特に今回扱っている Φ の S 波モード以外の高角運動量モードには曲率の効果が運動方程式の大きなポテンシャル項として現れる．従って動的鏡モデルだけで実際のブラックホール蒸発過程の最終状態を論じるのは無理がある．しかしこのモデルから示されたホーキング輻射と真空状態の間の量子縺れという普遍的アイデア自体は，正しい量子重力理論での蒸発過程においても本質的役割を演じている可能性もあり，大変興味深い．

7.4 量子縺れのモノガミーとホーキング輻射

一般に A と B という系の間の量子縺れが大きくなると，その A と B の合成系 AB は純粋状態に近づく．AB が純粋状態になると，任意の他の物理系 C とは古典，量子に関わらず相関を持てなくなる．その結果 AB が強く縺れれば，BC の間には量子縺れを共有できなくなる．逆に BC 間の量子縺れが強くなれば AB 間の量子縺れは小さくなる．この性質は量子縺れの一夫一妻制，または英語でモノガミー (monogamy) と呼ばれる．この定量化は例えばエントロピーの強劣加法性 (strong subadditivity) の不等式でも記述できる．A, B, C の一般の量子状態 $\hat{\rho}_{ABC}$ を考えよう．部分系の縮約状態 $\hat{\rho}_{AB} = \mathrm{Tr}_C\left[\hat{\rho}_{ABC}\right]$, $\hat{\rho}_{BC} = \mathrm{Tr}_A\left[\hat{\rho}_{ABC}\right]$, $\hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_{AC}\left[\hat{\rho}_{ABC}\right]$ を定義した時に，フォンノイマンエントロピー $S = -\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\right]$ に対して

$$S_{AB} + S_{BC} \geq S_B + S_{ABC} \tag{7.25}$$

という不等式を満たすことが数学的に証明されている [21], [71]．もし B と C の合成系 BC が純粋状態 $\hat{\rho}_{BC} = |\Psi\rangle_{BC}\langle\Psi|_{BC}$ であれば，$S_{BC} = 0$, $S_{ABC} = S_A$ が成り立つため，(7.25) 式とから

$$S_A + S_B - S_{AB} \leq 0$$

という関係が得られる．左辺はちょうど AB 間の量子相互情報量 $I(A||B) = S_A + S_B - S_{AB}$ に等しいが，これは負にならないことが厳密に証明されている [21]．従って $I(A||B) = 0$ という結論が導かれる．このことは AB 間には量子縺れを含めたいかなる相関もないことを意味しており，量子縺れのモノガミーの定量的表現にもなっている．量子縺れのモノガミーを考える上で重要なのは A, B, C の独立性である．この 3 つの系が局所的な系と解釈できる場合に LOCC の概念を導入することが可能となり，量子縺れが厳密に定義できるようになる．もし各系に重なりがあって，独立性が保たれないならば量子縺れは定義できないし，(7.25) 式の強劣加法性不等式も成り立つ必要はない．

以下では (7.18) 式の軌跡を動く鏡のモデルにおいて，ホーキング輻射のモ

ノガミー性をみておこう．(7.21) 式から分かるように，鏡から出てくるホーキング輻射 B と鏡に触れずに左側に落ち続けるリンドラーモード C は量子的に縺れた純粋状態になっている．特に角振動数 ω で指定されるそれぞれのモード B_ω, C_ω もその 2 つだけで純粋状態

$$|0(\omega)_{in}\rangle \propto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}n}|n\rangle_{B_\omega}|n\rangle_{C_\omega} \tag{7.26}$$

になっている．この量子縺れの起源はウンルーモード関数で記述されるリンドラー粒子間の量子縺れである．縺れ合うリンドラー粒子を分ける $x^+ = 0$ の境界付近に入射波の励起が存在しない限り，(7.26) 式の $B_\omega C_\omega$ 間の量子縺れは不可避である．従ってこの B_ω はホーキング輻射の他のいかなるモードとも量子縺れを含む相関を持てない．実際 (7.21) 式から分かるように，B_ω と他の角振動数のモードとは独立であり，相関がない．ここで注意が必要なのは，ウンルーモード関数 $e^{-i\omega g_{bh}(x^+)}$ は鏡との散乱後に普通の平面波モード関数 $e^{-i\omega x^-}$ になる点である．つまり C_ω と量子的に縺れた B_ω は局在せずに空間全体に広がっている．コンパクトな空間領域に局在する関数 $w_A(x)$ で定義される消滅演算子

$$\hat{a} = \int_{-\infty}^{\infty} w_A(x)\hat{\Pi}_-(x)dx$$

を持つ反射波の局所モード A を考えても，そのモード関数は必ず B_ω のモード関数と空間的重なりを持ち，一般には A と B_ω の生成演算子も可換ではなくなり，互いに独立ではない物理系になってしまう．このため $AB_\omega C_\omega$ 間でモノガミーを論じることはできないし，(7.25) 式の不等式も一般には成り立たないことに注意が必要である．この事実はホーキング輻射生成をリンドラー粒子とホーキング粒子のペアの多重生成とみなす場合に，より大きな注意が必要であることを意味する．この鏡モデルはその作用に場の量の 2 次の相互作用しか含まないため，輻射中の 1 つ 1 つのホーキング粒子は C の中のリンドラー粒子と対生成していると解釈できる．しかし粒として空間的に局在している 1 つのホーキング粒子と 1 つのリンドラー粒子だけで量子縺れ純粋状態になっているという簡単な描像は成り立たない．(7.26) 式は $B_\omega C_\omega$ の個々の粒子対が純粋状態にあることを意味しないためである．(7.26) 式は粒子零の真空状態も含めた粒子数の異なる状態間の量子コヒーレンスが $B_\omega C_\omega$ 系を純粋状態に保っていることを述べているに過ぎない．$x^+ = 0$ 近傍から対生成された 1 つのホーキング粒子 b と 1 つのリンドラー粒子 c は純粋状態にはなく，b, c は空間遠方の他のホーキング粒子 a や C 領域の真空の零点振動等とも量子的に縺れる．このことは bc の 2 粒子状態のエントロピー S_{bc} が零ではなく正の値をとること ($S_{bc} > 0$) を意味する [72]．相対論的な場の理論では一般に 1 粒子状態の重ね合わせ状態にある a や b は有界な空間領域に厳密に局所化することはできないこ

とも知られている．これはある有界領域内部だけにエネルギーが存在し，その外部は厳密に真空になる量子状態は1粒子状態の重ね合わせだけでは実現できないことが数学的に証明されているためである[73]．従ってそもそも粒子 a と粒子 b の空間的独立性も近似的にしか許されない事実がある．しかし a, b, c の局所性が実験上十分な精度で確保されれば (7.25) 式の強劣加法性も誤差の範囲で成立する．そして $S_{bc} > 0$ から ab 間の量子縺れと bc 間の量子縺れは同時に許されることになる．

7.5 ブラックホールの情報喪失問題

ホーキング輻射の存在が理論的に導かれた当初，ブラックホールがホーキング輻射を出しながら完全蒸発する場合に量子力学のユニタリティが破れる危険性がホーキング自身によって指摘された[74]．輻射が最後まで完全に熱的な混合状態のままだと，蒸発終了後に輻射と量子的に縺れるパートナーが存在しないため量子状態を純粋化できなくなる．そのため量子情報の一部が世界から欠落してしまう．これを情報喪失問題と呼ぶ．

その後超弦理論の AdS/CFT 対応によりブラックホールからの輻射に地平面内部の量子情報が全て含まれることが示唆されたため，ホーキング[75]も含めた多くの研究者によりユニタリティが壊れない蒸発シナリオが真剣に議論されるようになった．蒸発の最終局面において非常に軽くなったミニブラックホールの爆発の輻射エネルギーは極わずかである．もし地平面内部からの情報の開放が最後の爆発によって初めて成されるのなら，その内部に蓄えられた天文学的な情報量を極少量のエネルギーしか持たない輻射粒子で一気に運ぶことはできないと素朴には思える．そのため素粒子サイズの小ささでありながら低エネルギー領域に無限大の状態縮退度を持つレムナント（remnant, 残留物という意味）というおかしな物体が蒸発で残るというシナリオさえ提案された[76]．もしこのようなレムナントが存在すると，それと相互作用をする物質は決して熱的平衡に達することができないため周囲に熱的不安定性をもたらしてしまう．これまで実験的にもこのようなレムナントは観測されておらず，問題が多いシナリオと考えられている．

では蒸発の最終段階近くまでほぼ完全な熱的輻射を出しつつ，ブラックホール消滅後に全ての量子情報が戻っている可能性は他にないのだろうか．特に曲率特異点が量子重力の効果で解消されて地平面内部の全ての領域で量子力学が成り立つ可能性とも無理なく整合するシナリオがあれば魅力的である．量子重力理論が未完成であるため実際の重力系でそのようなモデルは具体的に構成されていないが，動的鏡モデルから得た知見はそのシナリオにある程度の説得力を与えている．前節で述べたウィルチェックのアイデア[69]のように，ホーキング輻射と真空状態の零点振動（またはリンドラー粒子）の間でも大量の量子縺

れが共有できる．ホーキング輻射の状態を純粋化するパートナーの大半が真空の量子揺らぎである場合にはレムナントがなくても情報喪失問題は解消できる可能性が高い．

ただ前にも述べたように現実の蒸発過程において何が起きるのかを知るには量子重力理論が必要となるが，現時点では完成していない．そこでウィルチェックのアイデアとは異なる様々なシナリオも現在提案されており，多くの研究者によって検討されている．その一つがブラックホール相補性仮説 (black hole complementarity conjecture) というシナリオである[77],[78]．これは量子重力の効果が十分大きなブラックホールの段階にも働き，ミニブラックホールの爆発よりずっと前から地平面内部に落ちたはずの情報が外部に戻ってきているという説である．この説ではブラックホール外部の人間にとって地平面近傍にウンルー効果の高温熱浴が実際に測定しなくても実在しているという立場をとる．そのため地平面そのものが量子重力のダイナミクスに支配される物理的な膜 (stretched horizon) に見える．外部から見ていると，落下物はその量子情報とともにこの高温の膜に溶かされ吸収される．しかしその量子情報はある一定時間が経つと膜から出る輻射に転写されて外部領域に戻ってくるように見えるため，外部測定者にとってはユニタリティが保たれると主張される．ただし地平面近傍でも等価原理は成り立つと考えるため，この説では落下物とともに地平面に落ちていく測定者は地平面通過時でも特に変わった効果を観測しない．その後落下物の量子情報はそのまま地平面内部の曲率特異点と衝突して世界から完全に消滅すると仮定する．外部測定者と落下する測定者とで地平面の見え方が全く異なるが，その 2 人の測定者は地平面を挟んで情報をやりとりすることができないためお互いが差を認識することはない．そのため量子力学の記述はそれぞれの測定者で異なっていても良いという考え方である．ただしそれでもこのシナリオには量子複製禁止定理に抵触する危険性が残されている．初期に落下物が持っていた量子情報は，外部測定者にとってはある時間のうちに輻射に乗って自分のところに戻ってくるが，落下する測定者にとっては同じ量子情報は落下物に含まれたまま地平面内部に入り，外部には戻らない．初期には 1 つだった落下物の量子情報だが，地平面で正確なコピーが作られて外部測定者がそのコピーを所有するように見える．もし外部測定者が持っている量子情報のコピーを再び地平面内部に落として，落下した測定者が持っているオリジナルの量子情報と並べることができたら，明らかに量子複製禁止定理と矛盾してしまう．しかし外部測定者が持っている量子情報のコピーを地平面内部に落としたとしても，先に落下した量子情報のオリジナルはそれが刻まれている落下物とともに特異点によって世界から消されてしまった後であり，矛盾は起きないと主張される．

他にも防火壁仮説 (firewall conjecture)[79] というシナリオが提案されており，自由落下する測定者も地平面通過時にファイアウォール (firewall) と呼ば

れる量子重力的な高温の励起物に遭遇して燃やされてしまう点がブラックホール相補性シナリオと異なっている．この場合，ブラックホールの内部空間はそもそも存在しないという立場である．

ブラックホール相補性仮説でも防火壁仮説でも地平面近傍の時空曲率が十分に小さな天文学的大きさのブラックホールですら量子重力の効果が無視できないという重大で革新的な仮定を必要としている．一方ウィルチェックのシナリオでは量子重力は素粒子サイズのミニブラックホールになるまで働かず，天文学的ブラックホールは古典時空としての記述で十分となる．

第 8 章
量子エンタングルメントと負エネルギー

8.1 基底状態の量子エンタングルメントが生み出す負エネルギー密度

量子場を含む多体系の基底状態は特別な場合を除いて量子縺れを持っている．そして基底状態が量子縺れを持つ系では必ず基底状態より小さな値を持つエネルギー密度期待値を実現する状態が存在する．この事実を簡単のために一般的な近接相互作用の 1 次元スピン鎖モデルを用いて説明しよう．スピン鎖モデルのハミルトニアンは各サイトに定義されるエルミートなエネルギー密度演算子

$$\hat{T}_n = \hat{X}_n + \sum_j \left(\frac{1}{2} g_{n-1/2,j} \hat{Y}_{n-1,j} \hat{Y}_{n,j} + \frac{1}{2} g_{n+1/2,j} \hat{Y}_{n,j} \hat{Y}_{n+1,j} \right) \quad (8.1)$$

の和で与えられる．ここで $\hat{X}_n, \hat{Y}_{n,j}$ はサイト n の部分系のヒルベルト空間に作用する局所的演算子であり，$g_{n\pm1/2,j}$ は近接相互作用の結合定数である．j は複数の相互作用がある場合の添え字である．全ハミルトニアンは T_n のサイト和

$$\hat{H} = \sum_n \hat{T}_n$$

で与えられる．例としてハミルトニアン

$$\hat{H} = B \sum_n \hat{\sigma}_n^z - J \sum_n \hat{\sigma}_n^x \hat{\sigma}_{n+1}^x - E_o$$

を持つ横磁場イジングモデルではエネルギー密度演算子は

$$\hat{T}_n = B\hat{\sigma}_n^z - \varepsilon_n - \frac{J}{2} \left(\hat{\sigma}_{n-1}^x \hat{\sigma}_n^x + \hat{\sigma}_n^x \hat{\sigma}_{n+1}^x \right)$$

で与えられる．ここで ε_n を $E_o = \sum_n \varepsilon_n$ を満たす定数とする．$\hat{H}$ の最低固有値に対応する固有状態が基底状態 $|g\rangle$ である．以降では縮退のない基底状態の場合で議論を行う．なお基底状態におけるエネルギー密度の期待値 $\langle g|\hat{T}_n|g\rangle$ が零でない場合でも，$\hat{T}_n$ の定義を定数シフトすることによって系の物理を変える

ことなく零にできる．従って以降では一般性を失うことなく

$$\langle g|\hat{T}_n|g\rangle = 0 \tag{8.2}$$

とする．これから

$$\langle g|\hat{H}|g\rangle = \sum_n \langle g|\hat{T}_n|g\rangle = 0$$

が導かれるため基底状態の $\hat{H}$ の固有値は零であることが分かる．

$$\hat{H}|g\rangle = 0. \tag{8.3}$$

従って $\hat{H}$ は非負演算子である．

$$\hat{H} \geq 0. \tag{8.4}$$

基底状態が各サイトの純粋状態 $|g_n\rangle$ の積で

$$|g\rangle = \prod_n |g_n\rangle \tag{8.5}$$

と書ける場合，この基底状態は量子的に縺れていない．この場合 $|n-n'|>1$ を満たすサイト n と n' において $\hat{O}_{n'}$ を n' の任意の局所的演算子とすると

$$\langle g|\hat{T}_n\hat{O}_{n'}|g\rangle = \langle g|\hat{T}_n|g\rangle\langle g|\hat{O}_{n'}|g\rangle = 0$$

という因子化 (factorization) の関係が自動的に満たされている．ここで最後に (8.2) 式を用いた．(8.5) 式の関係が成り立たない $|g\rangle$ は量子的に縺れた基底状態である．多くのモデルでは $|g\rangle$ が因子化関係が成り立たない．

$$\langle g|\hat{T}_n\hat{O}_{n'}|g\rangle \neq 0. \tag{8.6}$$

従って自動的に $|g\rangle$ は量子的に縺れた基底状態であることが分かる．この場合 $|g\rangle$ は $\hat{T}_n$ の固有状態になれないことが以下のように証明される．仮に $|g\rangle$ が固有値 ε_n の $\hat{T}_n$ の固有状態だとすると

$$\langle g|\hat{T}_n = \varepsilon_n\langle g|$$

が成り立つ．同時に $\varepsilon_n = \langle g|\hat{T}_n|g\rangle = 0$ が成り立つことから

$$\langle g|\hat{T}_n\hat{O}_{n'}|g\rangle = \varepsilon_n\langle g|O_{n'}|g\rangle = 0$$

となり，(8.6) 式の前提と矛盾する．従って $|g\rangle$ は $\hat{T}_n$ の固有状態になれない．この事実を用いるとエネルギー密度演算子 $\hat{T}_n$ は必ず負の固有値を持つことが以下のように示される．$\epsilon_\nu(n)$ を $\hat{T}_n$ の固有値とし，$|\epsilon_\nu(n), k_\nu, n\rangle$ を対応する固有状態としよう．k_ν は同じ固有値 $\epsilon_\nu(n)$ をとる固有状態を区別する添え字である．$\{|\epsilon_\nu(n), k_\nu, n\rangle\}$ は全ヒルベルト空間の完全基底でもあるため，

$$\sum_{\nu,k_\nu} |g_{\nu,k_\nu}(n)|^2 = 1 \tag{8.7}$$

を満たす複素係数 $g_{\nu,k_\nu}(n)$ によって，$|g\rangle$ は

$$|g\rangle = \sum_{\nu,k_\nu} g_{\nu,k_\nu}(n)|\epsilon_\nu(n), k_\nu, n\rangle \tag{8.8}$$

と一意に展開できる．(8.2) 式に (8.8) 式を代入すると

$$\sum_{\nu,k_\nu} \epsilon_\nu(n)\,|g_{\nu,k_\nu}(n)|^2 = 0 \tag{8.9}$$

という関係が得られる．ここで $\hat{T}_n$ の最低固有値 $\epsilon_-(n)$ が正である場合には，(8.7) 式と (8.9) 式を同時に満たす $g_{\nu,k_\nu}(n)$ は存在しない．$\epsilon_-(n) = 0$ の時には $g_{-,k_-}(n)$ 以外の成分が消える解が存在するが，この場合は

$$|g\rangle = \sum_{k_-} g_{-,k_-}(n)|\epsilon_-(n), k_-, n\rangle$$

と書けるため，$|g\rangle$ は $\hat{T}_n$ の固有値 $\epsilon_-(n)$ の固有状態になってしまう．しかし先に証明したように，(8.6) 式の前提から $|g\rangle$ は $\hat{T}_n$ の固有状態にはなれないため，$\epsilon_-(n)$ は零でもない．従って (8.6) 式のように因子化関係を満たさない量子的に縺れた基底状態 $|g\rangle$ を持つスピン鎖系では，$\hat{T}_n$ の最低固有値 $\epsilon_-(n)$ は必ず負になることが証明された．

8.2 量子場の負エネルギー密度

前節の事情は量子場でも変わらない．1 次元系の質量零の自由スカラー場 $\hat{\varphi}$ のエネルギー密度は $(\partial_x\hat{\varphi})^2$ を持つため，その真空状態 $|0\rangle$ でも量子的な縺れが生じている．またエネルギー密度演算子の 2 点相関関数も零にならないため因子化関係も破れている．そのため負エネルギー密度を持つ量子状態を作ることができる．例えば $|0\rangle$ と左進行波成分の 2 粒子状態 $|2\rangle$ の間の線形重ね合わせ状態

$$|\Psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\delta}\sin\theta|2\rangle$$

を考えよう．ここで θ と δ は実数のパラメータとする．左進行波成分のエネルギー密度演算子は $\hat{T}_{++}(x^+) =: \hat{\Pi}_+(x^+)^2 :$ で与えられるが，$\hat{T}_{++}(x^+)$ の中の $\hat{a}^+_\omega \hat{a}^+_{\omega'}$ に比例する項の存在のために，$\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle \neq 0$ となる点 x^+ が存在する．この点 x^+ を固定した時に θ と δ をうまく選べば $|\Psi\rangle$ はこの点の周囲で負のエネルギー密度期待値を持つことが以下のように分かる．期待値 $\langle\Psi|\hat{T}_{++}(x^+)|\Psi\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
&\langle\Psi|\hat{T}_{++}(x^+)|\Psi\rangle \\
&= 2\cos\theta\sin\theta\left(\cos\delta\,\mathrm{Re}\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle - \sin\delta\,\mathrm{Im}\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle\right) \\
&\quad + \sin^2\theta\langle 2|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle.
\end{aligned}
$$

と計算されるが，$\langle\Psi|\hat{T}_{++}(x^+)|\Psi\rangle$ が最小になるように θ と δ を決定すると

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle 2|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle}{\sqrt{\langle 2|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle^2 + 4\left|\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle\right|^2}}, \\
\sin\theta &= \frac{2\left|\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle\right|}{\sqrt{\langle 2|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle^2 + 4\left|\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle\right|^2}}, \\
\tan\delta &= -\frac{\mathrm{Im}\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle}{\mathrm{Re}\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle}
\end{aligned}
$$

となり，この時には確かにエネルギー密度の期待値は今考えている点において

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi|\hat{T}_{++}(x^+)|\Psi\rangle = -\frac{1}{2}\Bigg[&\sqrt{\langle 2|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle^2 + 4\left|\langle 0|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle\right|^2} \\
&- \langle 2|\hat{T}_{++}(x^+)|2\rangle\Bigg] < 0
\end{aligned}
$$

という負の値の値を持つ．左進行波の全エネルギーに対応するハミルトニアン

$$
\hat{H}_+ = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{T}_{++}(x^+)dx^+
$$

の期待値は決して負にならないが，$\hat{T}_{++}(x^+)$ 同士の非可換性のために負のエネルギー密度期待値をとる状態が現れる．もちろん負エネルギー領域があっても他の領域に十分な量の正エネルギーがあって，$\hat{H}_+$ の非負性が保たれる構造になっている．なお量子場の負エネルギーは，異なる粒子数状態間の干渉効果で生まれており，決して負のエネルギーを持つ 1 つ 1 つの粒子が集まって作り出しているわけではないことも強調しておこう．

量子場 $\hat{\varphi}$ は負のエネルギー密度を持てることが明らかになったが，ではその絶対値はどのくらいの大きさまで許されるのだろうか．この問いに対して重要な情報を与えるのがフラナガン (Flanagan) の量子不等式 [80] である．無限遠方では $\partial_x\xi(\pm\infty) = 0$ を満たす非負連続関数 $\xi(x)$ を考えよう．そして $\hat{T}_{++}(x^+)$ を用いて

$$
\hat{H}_\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\xi(x^+)\hat{T}_{++}(x^+)dx^+
$$

というエルミート演算子を考えよう．もし $\xi(x)$ がある有界領域 $[x_{1\xi}, x_{2\xi}]$ の中で $\xi(x) = 1$ となり，その外側では急激に減衰しているならば，$\hat{H}_\xi$ は $[x_{1\xi}, x_{2\xi}]$ の中のエネルギー量に対応する．このとき任意の量子状態 $|\Psi\rangle$ に対して

$$\langle\Psi|\hat{H}_\xi|\Psi\rangle \geq -\frac{1}{12\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_{x^+}\sqrt{\xi(x^+)}\right)^2 dx^+ \tag{8.10}$$

という不等式が成り立つことが示せる．同様の不等式はもちろん右進行波成分に対しても成り立つ．証明は以下の通りである．まず $\hat{\varphi}_+(x^+)$ を通常通りに平面波モード関数 $u_\omega(x^+) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}}e^{-i\omega x^+}$ で展開して量子化する．

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \int_0^\infty d\omega\left(\hat{a}_\omega u_\omega(x^+) + \hat{a}_\omega^\dagger u_\omega(x^+)^*\right).$$

次に $(-\infty,\infty)$ 上の単調増加関数 $f(x)$ を考えよう．するとモード関数 $v_\omega(x^+) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}}e^{-i\omega f(x^+)}$ で $\hat{\varphi}_+(x^+)$ を展開して

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \int_0^\infty d\omega\left(\hat{b}_\omega v_\omega(x^+) + \hat{b}_\omega^\dagger v_\omega(x^+)^*\right)$$

と量子化することができる．ここで消滅演算子 $\hat{b}_\omega$ はあるユニタリー演算子 $\hat{S}$ を用いて $\hat{a}_\omega$ と

$$\hat{S}\hat{a}_\omega\hat{S}^\dagger = \hat{b}_\omega$$

という関係に結ばれている．この事実から

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \hat{S}\hat{\varphi}_+\left(f(x^+)\right)\hat{S}^\dagger$$

という恒等式を得る．これを $\hat{T}_{++}(x)$ の定義式でもある

$$\hat{T}_{++}(x) =: \hat{\Pi}_+(x^+)^2 := \lim_{y\to x}\partial_x\partial_y\left[\hat{\varphi}_+(x)\hat{\varphi}_+(y) - \langle 0|\hat{\varphi}_+(x)\hat{\varphi}_+(y)|0\rangle\right]$$

に代入すると

$$\hat{T}_{++}(x) = \hat{S}\lim_{y\to x}\partial_x\partial_y\left[\hat{\varphi}_+(f(x))\hat{\varphi}_+(f(y)) - \langle 0|\hat{\varphi}_+(x)\hat{\varphi}_+(y)|0\rangle\right]\hat{S}^\dagger$$

を得る．ここで $X = f(x), Y = f(y)$ という座標変換を使うと

$$\begin{aligned}
&\partial_x\partial_y\hat{\varphi}_+(f(x))\hat{\varphi}_+(f(y))\\
&= \partial_x f(x)\partial_y f(y)\partial_X\partial_Y\hat{\varphi}_+(X)\hat{\varphi}_+(Y)\\
&= \partial_x f(x)\partial_y f(y)\partial_X\partial_Y\left(:\hat{\varphi}_+(X)\hat{\varphi}_+(Y): + \langle 0|\hat{\varphi}_+(X)\hat{\varphi}_+(Y)|0\rangle\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{++}(x) &= \left(\partial_x f(x)\right)^2\hat{S}\hat{T}_{++}(f(x))\hat{S}^\dagger\\
&\quad + \lim_{y\to x}\left[\partial_x f(x)\partial_y f(y)\langle 0|\hat{\Pi}_+(f(x))\hat{\Pi}_+(f(y))|0\rangle - \langle 0|\hat{\Pi}_+(x)\hat{\Pi}_+(y)|0\rangle\right]
\end{aligned}$$

が示せる．ここで $\langle 0|\hat{\Pi}_+(x)\hat{\Pi}_+(y)|0\rangle = -\frac{1}{4\pi(x-y-i0)^2}$ を用いると極限が計算できて

$$\hat{T}_{++}(x) = \left(\partial_x f(x)\right)^2\hat{S}\hat{T}_{++}(f(x))\hat{S}^\dagger + \Delta_f \tag{8.11}$$

という関係式を得る．ここで Δ_f は動的鏡モデルでも出てきたシュワルツ微分 (Schwarzian derivative) である．

$$\Delta_f = -\frac{1}{24\pi}\left[\frac{\partial_x^3 f(x)}{\partial_x f(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_x^2 f(x)}{\partial_x f(x)}\right)^2\right].$$

Δ_f は

$$\Delta_f = \frac{1}{12\pi}\sqrt{\partial_x f(x)}\partial_x^2\frac{1}{\sqrt{\partial_x f(x)}}$$

とも書ける．ここで $\partial_x f(x) > 0$ から正の値をとる関数 $\xi(x)$ を $f(x)$ から以下のように定義することが可能である．

$$\xi(x) = \frac{1}{\partial_x f(x)}.$$

逆に正関数 $\xi(x)$ を与えればこの $f(x)$ を見つけることができる．ここで (8.11) 式の右辺第 1 項に対して

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)\left(\partial_x f(x)\right)^2\hat{S}\hat{T}_{++}(f(x))\hat{S}^\dagger dx &= \hat{S}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{T}_{++}(f(x))\partial_x f(x)dx\hat{S}^\dagger \\ &= \hat{S}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{T}_{++}(X)dX\hat{S}^\dagger\end{aligned}$$

という計算ができる．また $\hat{H}_+ = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{T}_{++}(X)dX$ に対して

$$\hat{S}\hat{H}_+\hat{S}^\dagger = \int_0^\infty \omega\left(\hat{S}\hat{a}_\omega^\dagger\hat{S}^\dagger\right)\left(\hat{S}\hat{a}_\omega\hat{S}^\dagger\right)d\omega = \int_0^\infty \omega\hat{b}_\omega^\dagger\hat{b}_\omega d\omega$$

という関係があることから

$$\hat{H}_\xi = \int_0^\infty \omega\hat{b}_\omega^\dagger\hat{b}_\omega d\omega + \Delta[\xi]$$

という公式が得られる．ここで $\Delta[\xi]$ は

$$\Delta[\xi] = \frac{1}{12\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\xi(x)}\partial_x^2\sqrt{\xi(x)}dx = -\frac{1}{12\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x\sqrt{\xi}\right)^2 dx$$

で与えられる．$\int_0^\infty \omega\hat{b}_\omega^\dagger\hat{b}_\omega d\omega$ の任意の状態 $|\Psi\rangle$ での期待値は負にならないため (8.10) 式が証明された．なお (8.10) 式の等号は $\hat{b}_\omega|\Phi\rangle = 0$ を満たす状態 $|\Phi\rangle$ で達成される．(8.10) 式の不等式を使うと，正エネルギーを持っている領域から距離 L だけ離れた領域でとれる負エネルギーの絶対値の上限を得ることができる [89]．ある励起状態 $|\Psi(L)\rangle$ を考えた時，$x < 0$ の領域では期待値の意味でその総量が正になるエネルギー分布があるとしよう．そして $[0, L]$ の領域のエネルギー密度の期待値は零であり，$[L, L+d]$ の領域に負エネルギー分布が存在するとしよう．その合計を E_{negative} と書く．$x > L + d$ の領域はエネルギー密度を零とする．ここで $x < 0$ において $\xi(x) = 0$（厳密には零極限）であるとし，$x \in [L, \infty)$ で $\xi(x) = 1$ となる $\xi(x)$ を考えよう．この条件を満たす任意

の $\xi(x)$ に対して

$$\langle\Psi(L)|\hat{H}_\xi|\Psi(L)\rangle = E_{\text{negative}} = -|E_{\text{negative}}|$$

が成り立つ．そして (8.10) 式のフラナガン不等式から負エネルギーの絶対値 $|E_{\text{negative}}|$ に対して

$$|E_{\text{negative}}| \le \frac{1}{12\pi}\inf_{\xi}\int_0^L \left(\partial_{x^+}\sqrt{\xi(x^+)}\right)^2 dx^+ \tag{8.12}$$

という不等式を得る．ここで右辺の inf は上の境界条件を満たす任意の $\xi(x)$ に対してとられる．変分法を用いて右辺を最適化すると $x \in [0, L]$ に対して

$$\xi_{opt}(x) = (x/L)^2$$

という結果を得る．これを用いると (8.12) 式から，負エネルギー密度の距離に関する有用な不等式

$$|E_{\text{negative}}| \le \frac{1}{12\pi L} \tag{8.13}$$

を得る．この関係から $|E_{\text{negative}}|$ を一定にしたまま，正エネルギーからその負エネルギーを無限に引き離せないことが分かる．この負エネルギーの性質は全エネルギー $\hat{H}_+$ の非負性から理解できる．もし負エネルギーを正エネルギー領域から無限に離すことができれば，場の理論の局所性から正エネルギー分布が一切存在しないで負エネルギー励起だけを持つ量子状態が存在することを意味する．しかしそのような状態が存在すると全エネルギーの値も負となり，$\hat{H}_+$ の非負性と矛盾するからである．この事実は負エネルギーを持つ領域の十分近くには，必ず正エネルギー分布の領域が存在することを意味している．つまり負エネルギー励起は近くにある正エネルギー励起と緩い束縛状態を作るとも表現できる．但し後節で触れるように曲がった時空では事情が変わり，曲率を持つ空間領域では負エネルギー励起単独で伝搬することがある程度可能になる．

ここで動的鏡モデルを用いて (8.13) 式の不等式を満たす例を与えよう．まず $x^+ = f(x^-)$ という軌跡の鏡から出てくるエネルギーフラックスの期待値は

$$\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle = -\frac{1}{24\pi}\left[\frac{\partial^3_{x^-}f(x^-)}{\partial_{x^-}f(x^-)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2_{x^-}f(x^-)}{\partial_{x^-}f(x^-)}\right)^2\right]$$

で与えられるが，その全空間積分は

$$\begin{aligned}\langle 0_{in}|\hat{H}_-|0_{in}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle dx^- \\ &= \frac{1}{48\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2_{x^-}f(x^-)}{\partial_{x^-}f(x^-)}\right)^2 dx^- \ge 0\end{aligned}$$

となり，確かに負の値をとらない．$\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle = 0$ となる関数 $f(x)$ は a, b, c, d という実定数を使って

$$f(x)=\frac{a+bx}{c+dx}$$

という形に書けるが，異なる a,b,c,d の関数を繋いで作った

$$f\left(x^-\right)=\Theta(-x^-)x^-+\Theta\left(x^-\right)\Theta\left(L-x^-\right)\left[\frac{1}{J-J^2x^-}-\frac{1}{J}\right]$$
$$+\Theta\left(x^--L\right)\left[\frac{J^2}{\left(J-J^2L\right)^2}\left(x^--L\right)+\frac{1}{J-J^2L}-\frac{1}{J}\right]$$

という関数を考えよう．ここで L,J は正の定数であり，$f(x)$ の単調増加性から $0<L<1/J$ を満たしている．これを上の公式に代入すると

$$\langle 0_{in}|\hat{T}_{--}(x^-)|0_{in}\rangle=-\frac{1}{12\pi}J\delta\left(x^-\right)+\frac{1}{12\pi}\frac{J}{1-JL}\delta\left(x^--L\right)$$

という結果を得る．右辺第 1 項は $x^-=0$ の軌跡上を伝搬する負エネルギー

$$E_{\text{negative}}=-\frac{1}{12\pi}J \tag{8.14}$$

を持つ衝撃波である．右辺第 2 項は $x^-=L$ の軌跡上を伝搬する正エネルギーの衝撃波である．$J<1/L$ から (8.14) 式の結果は確かに (8.13) 式の不等式を満たしている．また全エネルギーは

$$\langle 0_{in}|\hat{H}_-|0_{in}\rangle=-\frac{1}{12\pi}J+\frac{1}{12\pi}\frac{J}{1-JL}=\frac{1}{12\pi}\frac{JL}{1-JL}J$$

と計算されて，確かに正の値になっている．ここで興味深いのは $x^-=L$ を運動する衝撃波のエネルギー

$$E_{\text{positive}}=\frac{1}{12\pi}\frac{J}{1-JL} \tag{8.15}$$

である．$J\to 1/L$ としながら $|E_{\text{negative}}|$ を上限値 $\frac{1}{12\pi L}$ に近づけると，(8.15) 式の正エネルギーは $+\infty$ に発散するようになっている．従って $E_{\text{negative}}=-\frac{1}{12\pi L}$ という有限の負エネルギー波束でも，それを作るエネルギーコストは無限大となる．

8.3 ブラックホール時空での負エネルギー密度流

動的鏡モデルではホーキング輻射は零エネルギーのリンドラー粒子群と量子的に縺れていた．しかし実際のブラックホールの場合には時空の曲率が存在し，その効果でこのリンドラー粒子の集まりは負のエネルギーを持つことが示される．その負エネルギーが地平面に吸収されることで，ブラックホールのエネルギーつまり質量の減少を引き起こす．その負エネルギー流は地平面内部に入るとそのまま曲率特異点にまで到達する．正のエネルギーを持ったホーキング輻射は逆に空間無限遠方へと離れていく．(8.13) 式の距離に関する負エネルギーの不等式は平坦な時空を仮定して導かれたものであり，このような曲がった時

空の場合には適用されない．以下では量子場のS波成分に注目して，実際にリンドラー粒子群が全体として持っている負エネルギーを確認しておこう．時間と動径の方向だけに注目して2次元ブラックホール時空を考える．この時空上で質量零の自由スカラー場 $\hat{\varphi}$ を考えよう．このストレステンソル演算子の任意の状態での期待値 $\left\langle \hat{T}^{\mu}_{\nu} \right\rangle$ は局所的保存則：

$$\nabla_{\mu} \left\langle \hat{T}^{\mu}_{\nu} \right\rangle = 0 \tag{8.16}$$

及び曲がった時空上でのトレース量子異常 (trace anomary) の関係式：

$$\left\langle \hat{T}^{\mu}_{\mu} \right\rangle = \frac{1}{24\pi} R \tag{8.17}$$

を満たす [54]．これを用いると $\left\langle \hat{T}^{\mu}_{\nu} \right\rangle$ の具体系を書き下すことができる．任意の2次元時空は共形ゲージ (conformal gauge) と呼ばれる

$$ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^- \tag{8.18}$$

という形の計量を持つ座標が張れる．スカラー曲率 R は計量の ρ を使って $R = 8e^{-2\rho}\partial_+\partial_-\rho$ と書けることと (8.16) 式と (8.17) 式から，この (x^+, x^-) の座標系において

$$\left\langle \hat{T}_{+-} \right\rangle = -\frac{1}{12\pi}\partial_+\partial_-\rho, \tag{8.19}$$

$$\left\langle \hat{T}_{\pm\pm} \right\rangle = \frac{1}{12\pi}\left(\partial_{\pm}^2\rho - (\partial_{\pm}\rho)^2 + t_{\pm}(x^{\pm})\right) \tag{8.20}$$

と求められる．ここで $t_{\pm}(x^{\pm})$ は $\hat{\varphi}$ の初期状態によって決定される実関数である．第7章7.1節のように，重力崩壊が落ち着いて地平面が定まった後の領域を記述する計量

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)}$$

を考えよう．ここで $F(r)$ は地平面の位置を $r = r_h = 2GM_{bh}$ であり $F(r) = 1 - \frac{r_h}{r}$ である．$\frac{dr}{dx} = F$ という関係を満たす $r = r(x)$ という座標変換で x を導入し，更に $x^{\pm} = t \pm x$ を定義する．すると計量は (8.18) 式の形に書け，ρ は

$$\rho = \frac{1}{2}\ln F\left(r\left(\frac{x^+ - x^-}{2}\right)\right)$$

で与えられる．(8.19) 式，(8.20) 式は今の場合

$$\left\langle \hat{T}_{+-} \right\rangle = \frac{1}{96\pi}F\partial_r^2 F,$$

$$\left\langle \hat{T}_{\pm\pm} \right\rangle = \frac{1}{192\pi}\left(2F\partial_r^2 F - (\partial_r F)^2\right) + \Upsilon_{\pm}(x^{\pm})$$

と計算される．$\Upsilon_{\pm}(x^{\pm})$ は初期状態で決まる境界条件の自由度である．ホーキング輻射は地平面内部から出てくることはできないため，

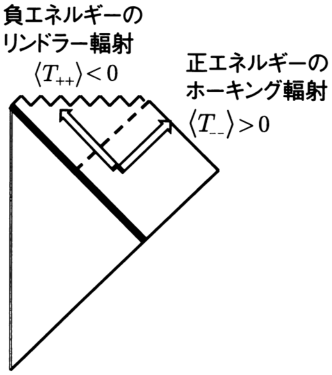


図 8.1 ブラックホール時空上で生成される正エネルギーのホーキング輻射と負エネルギーのリンドラー輻射.

$$\lim_{r\to r_h}\left\langle \hat{T}_{--}\right\rangle = 0$$

という境界条件が課せられ，その結果 $\Upsilon_-(x^-) = \frac{\pi}{12}T_{bh}^2$ と要請される．ここで $T_{bh} = \frac{1}{8\pi G M_{bh}}$ である．このことから $\left\langle \hat{T}_{--}\right\rangle$ は

$$\left\langle \hat{T}_{--}\right\rangle = -\frac{\pi}{3}T_{bh}^2\left(\frac{r_h}{r}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\frac{r_h}{r}\right)+\frac{\pi}{12}T_{bh}^2$$

で与えられる．すると確かに空間無限遠方 $(r\to\infty)$ では温度 T_{bh} のホーキング輻射のフラックスが現れる．

$$\lim_{r\to\infty}\left\langle \hat{T}_{--}\right\rangle = \frac{\pi}{12}T_{bh}^2.$$

一方空間無限遠方では入射波の真空状態にあるため，入射波のエネルギーは零である．従って

$$\lim_{r\to\infty}\left\langle \hat{T}_{++}\right\rangle = 0$$

という境界条件が必要である．これから $\Upsilon_+(x^+) = 0$ と定まり，

$$\left\langle \hat{T}_{++}\right\rangle = -\frac{\pi}{3}T_{bh}^2\left(\frac{r_h}{r}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\frac{r_h}{r}\right) \tag{8.21}$$

を得る．(8.21) 式において地平面近傍の極限をとると，

$$\lim_{r\to r_h}\left\langle \hat{T}_{++}\right\rangle = -\frac{\pi}{12}T_{bh}^2$$

となることから，確かにホーキング輻射と量子的に縺れてながら地平面内部に落下するリンドラー粒子群は負エネルギーを持っていることが分かる．これを負エネルギーリンドラー輻射と呼ぶ．図 8.1 にはこの時空のペンローズ図にこのエネルギーの流れを図示した．

第 9 章 量子エネルギーテレポーテーション

特別な例を除いて量子多体系の基底状態には量子縺れが存在する．どんな多体系でも最低エネルギー固有値が零となるようなエネルギー原点を採用できるが，その場合エネルギー密度の期待値も零になる．但し前章でみたように，基底状態の量子縺れはエネルギー密度の値をその固有値零として確定させず，量子揺らぎを与える．そして各領域のエネルギーの揺らぎは量子的に縺れ合っている．この性質から操作論的な意味におけるエネルギー輸送が LOCC だけで可能となる．これを実現するプロトコルが**量子エネルギーテレポーテーション** (quantum energy teleportation, 略して QET) である [81]~[83]．

9.1 基底状態の量子エンタングルメント破壊と局所冷却問題

多体系の基底状態には受動性 (passivity) という性質がある．恒等操作を除く任意の局所的操作を部分系に施すと必ず励起状態が生まれて，エネルギー期待値を増やすことを指す．このエネルギーの増加分はこの操作をする装置から仕事として系に注入される．この局所的操作には量子測定も含まれる．また基底状態の情報を系から取り出す測定には必ず量子縺れ破壊が伴う．従って基底状態の局所的測定では情報と引き換えにエネルギー注入と量子縺れ破壊が同時に起きる．以下では具体例としてスピン鎖モデルを用いてこのプロセスを説明しよう．これはサイト n のエネルギー密度演算子が $\hat{T}_n$ で与えられているモデルであり，またハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_n \hat{T}_n \tag{9.1}$$

というサイト和で与えられる．第 8 章 8.1 節のように，基底状態 $|g\rangle$ が $\langle g|\hat{T}_n|g\rangle = 0, \hat{H}|g\rangle = 0$ を満たすようにエネルギー原点を決めよう．ここで基底状態においてて $n = n_A$ のサイトにあるスピン系 A を一般測定する．その測定結果 μ を出

力する測定演算子を $\hat{M}_A(\mu)$ としよう．$\hat{M}_A(\mu)$ は

$$\sum_\mu \hat{M}_A(\mu)^\dagger \hat{M}_A(\mu) = \hat{I}_A \tag{9.2}$$

を満たす任意の演算子で構わないが，情報がきちんと得られる測定になるためには測定機と A の相互作用が不可欠であることから，全ての $\hat{M}_A(\mu)$ がユニタリー行列に比例するような場合は排除する．

$$\hat{\rho}_M = \sum_\mu \hat{M}_A(\mu)|g\rangle\langle g|\hat{M}_A(\mu)^\dagger \tag{9.3}$$

で定義される測定後状態はエネルギー E_A を持つ励起状態になる．E_A は

$$E_A = \mathrm{Tr}\left[\hat{H}\hat{\rho}_M\right] = \sum_\mu \langle g|\hat{M}_A(\mu)^\dagger \hat{H}\hat{M}_A(\mu)|g\rangle$$

で評価される．この E_A は測定中に測定機からスピン鎖系に注入されたものである．測定直後にはこの E_A は A 近傍に局在している．この場合に A の局所的操作で E_A を再びスピン鎖から全部取り出すことはできるだろうか．量子縺れやそれが生成する非局所的相関の性質から実はそれは不可能であることが示される．各測定後状態に測定結果に依存した任意の局所的操作 $\Gamma_{\mu A}$ を A に施そう．操作後の平均状態は

$$\hat{\rho}^{(LC)} = \sum_\mu \Gamma_{\mu A}\left[\hat{M}_A(\mu)|g\rangle\langle g|\hat{M}_A(\mu)^\dagger\right]$$

と書かれるが，この $\hat{\rho}^{(LC)}$ におけるエネルギー期待値は零になれず，どの $\Gamma_{\mu A}$ でも必ず有限の残留エネルギーが残る[81]．その最小値を

$$E_{res} = \min_{\Gamma_{\mu A}} \mathrm{Tr}\left[\hat{H}\hat{\rho}^{(LC)}\right]$$

で定義すると $E_{res} > 0$ となる．この残留エネルギーの出現は A の測定が引き起こす基底状態の量子縺れ破壊に原因がある．基底状態では A は量子縺れを通じて離れたサイトのスピン系 B とも相関を持っている．しかし A の測定によりこの AB 間の量子縺れや相関は一般に減少する．E_A をスピン鎖系から全部抜いてもとの基底状態に戻すためには，この AB 間の相関も復活させる必要がある．しかし A やその周囲だけの局所的操作だけではこの相関は増加しない．従って零エネルギー状態である基底状態は復活できないため，必ずスピン鎖系に E_{res} 以上のエネルギーが残ってしまう．E_{res} は確かに A 近傍に局在して存在するエネルギーなのに，局所的操作では A から取り出して自由に使用することができない拘束されたエネルギーになっている．この事情は量子場でも同様である．この測定で得られた情報を用いると興味深い現象が起こる．E_{res} を担保にして局所的基底状態にある離れた領域の部分系 B からエネルギーを取り出すことができるのだ．AB 間の量子縺れや相関は測定によって破壊されたが，

その代償としてエネルギー零のはずだった B からエネルギーを測定結果の情報を用いて取り出せ，自由に使うことが可能となる．これが QET である．以降ではいくつかの物理系を用いて QET プロトコルを具体的に説明しよう．

9.2 ミニマル QET モデル

非自明で一番簡単な QET モデルは以下の 2 つの量子ビット A と B が横磁場イジングモデルの相互作用をしているモデルである[84]．ハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}$$

は 3 つの項から成り，各項は

$$\hat{H}_A = h\hat{\sigma}_A^z + \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}, \quad \hat{H}_B = h\hat{\sigma}_B^z + \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}, \quad \hat{V} = 2k\hat{\sigma}_A^x\hat{\sigma}_B^x + \frac{2k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

で与えられる．ここで h と k はエネルギー次元を持つ正の定数であり，$\hat{\sigma}_A^x$ $(\hat{\sigma}_B^x)$ は各々のパウリ演算子の x 成分，$\hat{\sigma}_A^z$ $(\hat{\sigma}_B^z)$ は z 成分である．各項に足されている定数部分は基底状態 $|g\rangle$ においてその期待値が零になるように定めてある．

$$\langle g|\hat{H}_A|g\rangle = \langle g|\hat{H}_B|g\rangle = \langle g|\hat{V}|g\rangle = 0.$$

この結果，基底状態のエネルギー固有値も零に調整されている．従って $\hat{H} \geq 0$ が成り立つ．具体的に基底状態を求めると

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}|+\rangle_A|+\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}|-\rangle_A|-\rangle_B$$

となる．ここで $|\pm\rangle_A$ $(|\pm\rangle_B)$ は $\hat{\sigma}_A^z$ $(\hat{\sigma}_B^z)$ のアップ状態とダウン状態を表している．$|g\rangle$ において A の量子ビットを測定する．特に A の測定が B のエネルギーに影響を与えない $\hat{\sigma}_A^x$ の理想測定を考えよう．ポテンシャル項 $\hat{V}$ が $\hat{\sigma}_A^x$ しか含まない事実から $[\hat{\sigma}_A^x, \hat{V}] = 0$ が成り立ち，A の $\hat{\sigma}_A^x$ を測っても $\hat{V}$ には測定による撹乱がない．ここで $\hat{\sigma}_A^x$ のアップ状態が観測された場合にその結果を $\mu = +1$ と表し，ダウン状態が観測された場合には $\mu = -1$ と表すことにしよう．その時各々の結果に対応する測定演算子は射影演算子

$$\hat{P}_A(\mu) = \frac{1}{2}(1 + \mu\hat{\sigma}_A^x)$$

で与えられる．そして測定後のエネルギーの期待値は

$$E_A = \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{9.4}$$

と計算される．測定後の B の縮約状態は A の測定によって乱されず，基底状態と変わらない．次に測定後に B に対する任意のユニタリ操作 $\hat{W}_B$ を施しても，この 2 量子ビット系全体のエネルギーを下げることができず，外部にエネ

ルギーを取り出せないことを確認しておこう．操作後の平均状態は

$$\hat{\rho}_W = \hat{W}_B \left(\sum_\mu \hat{P}_A(\mu)|g\rangle\langle g|\hat{P}_A(\mu)^\dagger \right) \hat{W}_B^\dagger$$

で与えられるため，操作前後での全エネルギーの差は直接計算により

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_W \hat{H}\right] - E_A = \langle g|\hat{W}_B^\dagger \hat{H} \hat{W}_B|g\rangle$$

と確認できる．ここで $\hat{W}_B|g\rangle$ は 1 つの量子状態であるため，$\hat{H}$ の非負性から $\langle g|\hat{W}_B^\dagger \hat{H} \hat{W}_B|g\rangle$ は負になれない．更に恒等演算子ではない $\hat{W}_B$ の局所性から実際には

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_W \hat{H}\right] - E_A > 0$$

となり，系の全エネルギーは増加してしまう．従って系のエネルギーを W_B によって決して取り出すことができないことが確かめられた．これは A の測定直後にはエネルギーが普通の意味で B に届いていないためである．もちろん系が十分に時間発展するのを待てば A から B にエネルギーは届く．実際，A の測定後の $\hat{H}_B, \hat{V}$ の期待値の時間発展は

$$\langle \hat{H}_B(t) \rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_M e^{it\hat{H}} \hat{H}_B e^{-it\hat{H}}\right] = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2+k^2}} \left[1 - \cos(4kt)\right],$$

$$\langle \hat{V}(t) \rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_M e^{it\hat{H}} \hat{V} e^{-it\hat{H}}\right] = 0$$

と計算されるため，$1/k$ 程度の時間を待てば A から B にエネルギーは伝搬してくることが確かめられる．これを B の局所的操作で外部に取り出すことはもちろん可能である．ただしこれは通常のエネルギー輸送現象にすぎない．一方，QET では $1/k$ よりずっと短い時間で B からエネルギーを取り出せる．ここで注目すべきは，$\hat{H}$ と異なり，$\hat{H}_A$, $\hat{H}_B$, $\hat{V}$ や $\hat{H}_B + \hat{V}$ が負の固有値を持つ点である．このため全エネルギーが正の期待値を持っていても各部分エネルギーの期待値は負に成り得る．そのため B がエネルギー零の局所的基底状態にあっても，A の測定結果を用いれば B に負エネルギーを残しながら正のエネルギーを B から取り出せるのだ．例えば測定結果 μ に依存する

$$\hat{U}_B(\mu) = \cos\theta_\mu + i\sigma_B^y \sin\theta_\mu$$

というユニタリー操作を考えよう．ここで θ_μ は

$$\tan(2\theta_\mu) = -\mu \frac{hk}{h^2+2k^2} \tag{9.5}$$

を満たす角度パラメータである．今の場合は非相対論的取り扱いをしているため古典通信の速さは無限大と近似できる．このことも加味すると，B に操作した後の平均化された状態は

$$\hat{\rho}_{QET} = \sum_{\mu} \hat{U}_B(\mu)\hat{P}_A(\mu)|g\rangle\langle g|\hat{P}_A(\mu)^{\dagger}\hat{U}_B(\mu)^{\dagger}$$

と書ける．$\hat{U}_B(\mu)$ の局所性から $\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{QET}\hat{H}_A\right] = E_A$ が成り立つため，この操作後の系のエネルギー差は

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{QET}\hat{H}\right] - E_A = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{QET}\left(\hat{H}_B + \hat{V}\right)\right]$$

と計算される．そして (9.2) 式を用いると $\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{QET}\left(\hat{H}_B + \hat{V}\right)\right]$ は負の値をとることが分かる．そのため B 領域に負エネルギーが生じたことが確認できる．欠損したエネルギー

$$E_B = E_A - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{QET}\hat{H}\right]$$

は $\hat{U}_B(\mu)$ を施す装置によって外部に持ち出されたと解釈される．E_B は具体的には

$$E_B = \frac{h^2 + 2k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}\left[\sqrt{1 + \frac{h^2k^2}{\left(h^2 + 2k^2\right)^2}} - 1\right] \tag{9.6}$$

と計算される．A と B の前にそれぞれ立って LOCC を行う 2 人の測定者アリスとボブにとって，基底状態の系に注入された E_A を QET の入力エネルギーとみなし，B の局所的基底状態から取り出された E_B を QET の出力エネルギーとみなせる．従ってアリスとボブにとっての操作論的な意味において QET は高速エネルギー輸送現象と解釈される．

9.3 一般スピン鎖系における QET

前節のモデルでは相互作用をしている 2 量子ビットで構成されているため，局所性の概念を導入するためにポテンシャル項を乱さない測定演算子を選ぶ必要があった．しかし多数のスピンを有する近接相互作用スピン鎖モデルでは十分なサイト距離をとるだけで，部分系の局所性は自明に確立する．そのために一般の局所的測定に対しても QET を構成できる．(9.1) 式のハミルトニアンで記述されるスピン鎖系の $|n_A - n_B| \geq 3$ を満たす $n = n_A$ のスピン A，$n = n_B$ のスピン B を考えよう．(9.2) 式を満たす測定演算子 $\hat{M}_A(\mu)$ で記述される一般測定を A に施すと，スピン鎖に注入されるエネルギーは

$$E_A = \sum_{\mu}\langle g|\hat{M}_A(\mu)^{\dagger}\,\hat{H}\hat{M}_A(\mu)\,|g\rangle$$

で与えられる．ここで A 周辺に局在するエネルギーの演算子を

$$\hat{H}_A = \sum_{n=n_A-1}^{n_A+1}\hat{T}_n$$

で定義しよう．足されている $\hat{T}_n$ は A の状態変化に影響を受けるエネルギー密度演算子全てである．そして

$$\hat{H}_{\bar{A}} = \hat{H} - \sum_{n=n_A-1}^{n_A+1} \hat{T}_n$$

という演算子を導入すると，$\hat{M}_A(\mu)$ と可換である．

$$\left[\hat{H}_{\bar{A}},\ \hat{M}_A(\mu)\right] = 0.$$

従って

$$\begin{aligned}
&\sum_\mu \langle g|\hat{M}_A(\mu)^\dagger \hat{H}_{\bar{A}} \hat{M}_A(\mu)|g\rangle \\
&= \langle g| \left(\sum_\mu \hat{M}_A(\mu)^\dagger \hat{M}_A(\mu) \right) \hat{H}_{\bar{A}}|g\rangle = \langle g|H_{\bar{A}}|g\rangle \\
&= \sum_{n \notin [n_A-1, n_A+1]} \langle g|T_n|g\rangle = 0
\end{aligned}$$

が示せることから E_A は

$$E_A = \sum_\mu \langle g|\hat{M}_A(\mu)^\dagger \hat{H}_A \hat{M}_A(\mu)|g\rangle$$

とも書ける．次に $n = n_A$ の A の測定で得た情報 μ を古典通信で $n = n_B$ に送ろう．ここでも非相対論的モデルを考えているため，通信速度は無限大にして扱う．その後 μ に依存した

$$\hat{U}_B(\mu) = \exp\left[-i\mu\theta\hat{G}_B\right]$$

という局所的ユニタリー演算子を B に施そう．ここで $\hat{G}_B$ は B の局所的エルミート演算子であり，θ は実パラメータである．操作後状態は

$$\hat{\rho}_{QET} = \sum_\mu \hat{U}_B(\mu)\hat{M}_A(\mu)|g\rangle\langle g|\hat{M}_A(\mu)^\dagger \hat{U}_B(\mu)^\dagger$$

で与えられる．θ をうまく選ぶと

$$E_B = E_A - \mathrm{Tr}\left[\hat{H}\hat{\rho}_{QET}\right]$$

は正になり，$\hat{U}_B(\mu)$ の操作でエネルギー E_B を局所的基底状態である B から取り出せることが分かる．ここで B 周辺に局在するエネルギーの演算子を

$$\hat{H}_B = \sum_{n=n_B-1}^{n_B+1} \hat{T}_n$$

で導入し，更に

$$\hat{H}_{\overline{AB}} = \hat{H} - \hat{H}_A - \hat{H}_B$$

という演算子を定義しよう．ここで局所性から $\left[\hat{H}_{\overline{AB}}, \hat{M}_A(\mu)\right] = \left[\hat{H}_{\overline{AB}}, \hat{U}_B(\mu)\right] = 0$ が成り立っている．これを用いると転送エネルギー E_B に対して

$$E_B = -\sum_{\mu} \langle g|\hat{\Pi}_A(\mu)\,\hat{H}_B(\mu)|g\rangle \tag{9.7}$$

という一般的公式が得られる．E_B は A と B のある 2 点相関関数の和で書けている．ここで

$$\hat{\Pi}_A(\mu) = \hat{M}_A(\mu)^\dagger\,\hat{M}_A(\mu)$$

は出力 μ に対応する POVM であり，$\hat{H}_B(\mu)$ は

$$\hat{H}_B(\mu) = \hat{U}_B(\mu)^\dagger \hat{H}_B \hat{U}_B(\mu)$$

で定義される μ に依存した準局所的エルミート演算子である．$|g\rangle$ がもし量子的に縺れていない基底状態であれば，因子化関係が成り立つため

$$E_B = -\sum_{\mu} \langle g|\hat{\Pi}_A(\mu)|g\rangle\langle g|\hat{H}_B(\mu)|g\rangle$$

が成り立つ．$\langle g|\hat{\Pi}_A(\mu)|g\rangle$ は測定結果 μ の出現確率であることと $\hat{H}_B = \hat{H} - \hat{H}_{\overline{AB}} - \hat{H}_A$ と用いれば

$$\begin{aligned} E_B &= -\sum_{\mu} \langle g|\hat{\Pi}_A(\mu)|g\rangle\langle g|\hat{U}_B(\mu)^\dagger \left(\hat{H} - \hat{H}_{\overline{AB}} - \hat{H}_A\right)\hat{U}_B(\mu)|g\rangle \\ &= -\sum_{\mu} p_\mu \langle g|\hat{U}_B(\mu)^\dagger \hat{H} \hat{U}_B(\mu)|g\rangle \le 0 \end{aligned}$$

から E_B は正の値になれないことが示される．従って QET が有効に働くためには基底状態の量子縺れの存在が不可欠である．θ を十分に小さいとして $\hat{U}_B(\mu)$ が

$$\hat{U}_B(\mu) \sim 1 - i\theta\mu\hat{G}_B + O(\theta^2)$$

と展開できる場合に E_B は

$$E_B = \theta\langle g|\hat{O}_A\hat{D}_B|g\rangle + O(\theta^2) \tag{9.8}$$

と評価できる．$\hat{O}_A, \hat{D}_B$ は

$$\hat{O}_A = \sum_{\mu} \mu\hat{\Pi}_A(\mu), \qquad \hat{D}_B = i\left[\hat{H}_B, \hat{G}_B\right] = i\left[\hat{H}, \hat{G}_B\right]$$

で定義されるエルミート演算子である．うまく $\hat{M}_A(\mu)$ と $\hat{U}_B(\mu)$ を選べば，2 点相関関数 $\langle g|\hat{O}_A\hat{D}_B|g\rangle$ は基底状態の量子縺れの存在のために $\langle g|\hat{O}_A\hat{D}_B|g\rangle \neq 0$ とすることが可能である．また $\left[\hat{O}_A, \hat{D}_B\right] = 0$ から $\langle g|\hat{O}_A\hat{D}_B|g\rangle$ の実数性も証明できる．これらの事実から (9.8) 式において θ の符号を $\langle g|\hat{O}_A\hat{D}_B|g\rangle$ の符号と同じにとれば $E_B > 0$ とでき，QET を機能させることが一般にできる．ここ

でモデルを量子ビット鎖に限定しよう．そして $\hat{\sigma}_A$ と $\hat{\sigma}_B$ を A, B のパウリ演算子の任意方向の成分としよう．この場合，A の測定演算子を $\mu = \pm 1$ の 2 値射影演算子 $\hat{P}_A(\mu) = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + \mu\hat{\sigma}_A\right)$ とし，また $\hat{G}_B = \hat{\sigma}_B$ ととると，E_B を最大にするように θ を最適化することもできる．正のパラメータ $\xi = \langle g|\hat{\sigma}_B \hat{H} \hat{\sigma}_B|g\rangle$ 及び B の準局所演算子 $\hat{\sigma}'_B = i\left[\hat{H}_B,\ \hat{\sigma}_B\right]$ と $\hat{\sigma}_A$ の 2 点相関関数 $\eta = \langle g|\hat{\sigma}_A \hat{\sigma}'_B|g\rangle$ を定義する．そして θ を $\tan(2\theta) = \frac{\eta}{\xi}$ を満たすように定めると E_B は

$$E_B = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi\right)$$

と計算され，$\eta \neq 0$ である限り必ず正になることが分かる [81]．

9.4 QET におけるエネルギーと情報量の関係性

前節の解析からも分かるように QET では基底状態の量子縺れが本質的役割を担っている．QET においてその量子縺れと E_B の定量的関係を明らかにすることは大変重要であるが，その全貌は不明である．但しミニマル QET モデルではその具体的な関係を書き下すことは可能である．測定演算子 $\hat{M}_A(\mu)$ を $\hat{\sigma}_A^x$ と単位演算子 $\hat{I}_A$ を用いて構成すれば，$\left[\hat{M}_A(\mu), \hat{V}\right] = 0$ を満たすポテンシャル $\hat{V}$ を乱さない一般測定の集合を考えることができる．この測定が基底状態の量子縺れをどのくらい壊すかという指標として，測定前後の量子縺れエントロピーの差

$$\Delta S_{AB} = S_{AB} - \sum_{\mu} p_\mu S_{AB}(\mu)$$

を考えることができる．ここで S_{AB} は $|g\rangle$ での AB 間の量子縺れエントロピーであり，p_μ は測定結果 μ の出現確率であり，$S_{AB}(\mu)$ は測定後状態 $\hat{M}_A(\mu)|g\rangle$ での量子縺れエントロピーである．すると ΔS_{AB} と E_B の間には

$$\Delta S_{AB} \geq \frac{1 + \sin^2 \varsigma}{2\cos^3 \varsigma} \ln \frac{1 + \cos \varsigma}{1 - \cos \varsigma} \frac{E_B}{\sqrt{h^2 + k^2}} \tag{9.9}$$

という不等式が成り立つことが示せる [84]．ここで ς は $\tan \varsigma = \frac{k}{h}$ を満たす実パラメータである．これはある QET プロトコルで E_B の転送エネルギーを取り出せた時に，そのプロトコルの測定による量子縺れの減少量 ΔS_{AB} は (9.9) 式の右辺の量以上であることを示している．これだけの大きさの ΔS_{AB} を許容するように $|g\rangle$ の量子縺れの総量 S_{AB} は大きくなければならないとも解釈できる．また測定を固定した時に $U_B(\mu)$ をいろいろ変化させた時の E_B の最大値 $\max_{U_B(\mu)} E_B$ を考えると

$$\max_{U_B(\mu)} E_B \geq \frac{2\sqrt{h^2 + k^2}\left[\sqrt{4 - 3\cos^2 \varsigma} - 2 + \cos^2 \varsigma\right]}{(1 + \cos \varsigma) \ln\left(\frac{2}{1 + \cos \varsigma}\right) + (1 - \cos \varsigma) \ln\left(\frac{2}{1 - \cos \varsigma}\right)} \Delta S_{AB} \tag{9.10}$$

という不等式も成り立つ[84]．これは $\hat{V}$ を乱さない測定によって量子縺れが ΔS_{AB} だけ減少すれば，(9.10) 式の右辺の量以上の転送エネルギーを達成する $U_B(\mu)$ が存在することを意味している．

ミニマルモデル以外でも，調和振動子鎖モデルでは (9.9) 式と同様の関係が成り立つことが数値的解析によって知られている[85]．一般のスピン鎖や近接相互作用をする高次元スピンネットワークでは量子縺れと E_B を線形的に結び付ける不等式は知られていない．しかしある有界領域の中の部分系 A を一般測定して，その結果に依存したユニタリー操作を領域外部にある別な部分系 B に施す QET において，以下の不等式が厳密に成り立つことが証明されている[86]．

$$S_{A\bar{A}} \geq \frac{E_B^2}{4\left\|\hat{H}_B\right\|^2}. \tag{9.11}$$

ここで $S_{A\bar{A}}$ は基底状態における A とその外部全体の部分系 $\bar{A}$ の間の量子縺れエントロピーであり，$\hat{H}_B$ はエネルギー E_B を取り出す部分系 B 周辺に局在するエネルギー演算子である．$\|\cdot\|$ は行列ノルムであり，エルミート行列に対してはその固有値の絶対値の最大値になる．定義により B は $\bar{A}$ に含まれる．(9.11) 式の関係は量子縺れ $S_{A\bar{A}}$ が小さい場合に非自明な制限を E_B に与える．

9.5 量子場を用いたQET

ここでは 1 次元空間の質量零スカラー場 $\hat{\varphi}$ の左進行波成分を用いた相対論的な QET を考える[90]．ある空間領域 $R_A = [x_{A-}, x_{A+}]$ での量子場の 2 値の一般測定を扱うために，測定機のプローブ系として 1 個の量子ビット D を考える．そしてある短時間のうちに D と R_A の領域の量子場を相互作用させよう．このモデルでは相互作用ハミルトニアンを

$$\hat{H}_M(t) = g(t)\left(\frac{\pi}{4} + \hat{G}_A\right)\hat{\sigma}_D^y$$

という形であると仮定する．$\hat{\sigma}_D^y$ はパウリ演算子の y 成分であり，$\hat{G}_A$ は量子場のエルミート演算子で

$$\hat{G}_A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_A(x)\hat{\Pi}_+(x)\,dx$$

と与えられるとする．ここで $\lambda_A(x)$ は R_A の間のみ非零の値を持つ滑らかな実関数である．また $g(t)$ は時間に依存した相互作用の結合定数であり，

$$g(t) = \delta(t)$$

という形で近似する．また相互作用前の量子場は真空状態 $|0\rangle$ にあるとし，D はパウリ演算子の z 成分 $\hat{\sigma}_D^z$ のアップ状態 $|+\rangle$ にとる．相互作用の後 D に $\hat{\sigma}_D^z$ の理想測定をし，もしアップ状態 $|+\rangle$ に見出されれば測定結果を $b = 0$ と表記

し，もしダウン状態 $|-\rangle$ ならば $b=1$ と表記する．この場合測定演算子は

$$\hat{M}_{0A} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \hat{G}_A\right), \tag{9.12}$$

$$\hat{M}_{1A} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \hat{G}_A\right) \tag{9.13}$$

と計算される．また $b=0,1$ の各々の結果の出現確率は

$$p_b = \langle 0|\hat{M}_{bA}^\dagger \hat{M}_{bA}|0\rangle = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^b\langle 0|\sin\left(2\hat{G}_A\right)|0\rangle\right) \tag{9.14}$$

で与えられる．ここで滑らかな関数 $\lambda(x)$ に対して一般に

$$\hat{U}\left[\lambda\right] = \exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(x)\hat{\Pi}_+\left(x\right)dx\right)$$

というユニタリー演算子を定義しよう．すると

$$\langle 0|\sin\left(2\hat{G}_A\right)|0\rangle = \frac{1}{2i}\left(\langle 0|\hat{U}\left[2\lambda_A\right]|0\rangle - \langle 0|\hat{U}\left[-2\lambda_A\right]|0\rangle\right)$$

という関係を得る．ここで $\lambda_A(x)$ のフーリエ変換

$$\tilde{\lambda}_A(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda_A(x)e^{ikx}dx$$

を導入すると

$$\hat{U}\left[\lambda\right] = \exp\left[-\frac{1}{8\pi}\int_0^{\infty}\left|\tilde{\lambda}(\omega)\right|^2\omega d\omega\right]\exp\left[-\int_0^{\infty}\tilde{\lambda}(\omega_1)\hat{a}_{\omega_1}^{+\dagger}\sqrt{\frac{\omega_1}{4\pi}}d\omega_1\right]$$
$$\times\exp\left[\int_0^{\infty}\tilde{\lambda}(\omega_2)^*\hat{a}_{\omega_2}^{+}\sqrt{\frac{\omega_2}{4\pi}}d\omega_2\right]$$

という公式から，

$$\langle 0|\hat{U}\left[2\lambda_A\right]|0\rangle = \langle 0|\hat{U}\left[2\lambda_A\right]|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\tilde{\lambda}_A(\omega)\right|^2\omega d\omega\right)$$

が確かめられる．これから

$$\langle 0|\sin\left(2\hat{G}_A\right)|0\rangle = 0$$

という計算ができる．これは $\hat{\varphi} \to -\hat{\varphi}$ に関する対称性からも導ける．従って (9.14) 式において観測確率は $b=0,1$ のどちらの測定結果に対しても等しくなり，

$$p_b = \frac{1}{2} \tag{9.15}$$

で与えられることが分かる．ここで $\hat{U}\left[\lambda\right]$ を使ってコヒーレント状態

$$|\lambda\rangle = \hat{U}\left[\lambda\right]|0\rangle \tag{9.16}$$

を導入しよう．これは消滅演算子 $\hat{a}_\omega^+$ の固有値 $-\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}}\tilde{\lambda}(\omega)$ に対応する固有状態である．すると各々の結果に対応する測定後状態は

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{2}\hat{M}_{0A}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}|\lambda_A\rangle + e^{-\frac{i\pi}{4}}|-\lambda_A\rangle\right), \tag{9.17}$$

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{2}\hat{M}_{1A}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}|\lambda_A\rangle - e^{-\frac{i\pi}{4}}|-\lambda_A\rangle\right) \tag{9.18}$$

と書かれる．ここで考えている測定が理想測定とは違う一般測定であることから，異なる測定結果に対応する状態でも互いに直交していないことに注意してほしい $(\langle\psi_+|\psi_-\rangle = \langle\lambda_A|-\lambda_A\rangle \neq 0)$．$\hat{U}[\lambda]$ の定義から

$$\hat{U}[\lambda]^\dagger\,\hat{\Pi}_+(x)\,\hat{U}[\lambda] = \hat{\Pi}_+(x) - \frac{1}{2}\partial_x\lambda(x) \tag{9.19}$$

という公式が導かれる．これを使うと，左向き進行波のエネルギーフラックス $\hat{T}_{++}(x) =: \hat{\Pi}_+(x)^2:$ の期待値 $\langle\psi_b|\hat{T}_{++}(x^+)|\psi_b\rangle$ はどちらの測定結果に対しても

$$\langle\psi_b|\hat{T}_{++}(x^+)|\psi_b\rangle = \frac{1}{4}\left(\partial_+\lambda_A(x^+)\right)^2 \tag{9.20}$$

という同じ値になる．平均化された測定後状態は

$$\hat{\rho}_M = \frac{1}{2}|\psi_0\rangle\langle\psi_0| + \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$$

で与えられるが，測定が R_A 内の局所的操作であるため $\hat{\rho}_M$ は R_A の中にだけ励起が存在する，厳密に局在化した状態である．つまり R_A の外側の $\bar{R}_A$ では厳密な局所的真空になっていることも確かめられる．実際

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_M &= \frac{1}{2}|\lambda_A\rangle\langle\lambda_A| + \frac{1}{2}|-\lambda_A\rangle\langle-\lambda_A| \\ &= \frac{1}{2}\hat{U}[\lambda_A]\,|0\rangle\langle 0|\hat{U}[\lambda_A]^\dagger + \frac{1}{2}\hat{U}[-\lambda_A]\,|0\rangle\langle 0|\hat{U}[-\lambda_A]^\dagger\end{aligned}$$

と

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{R_A}\left[\hat{U}[\pm\lambda_A]\,|0\rangle\langle 0|\hat{U}[\pm\lambda_A]^\dagger\right] = \mathop{\mathrm{Tr}}_{R_A}\left[\hat{U}[\pm\lambda_A]^\dagger\,\hat{U}[\pm\lambda_A]\,|0\rangle\langle 0|\right] = \mathop{\mathrm{Tr}}_{R_A}\left[|0\rangle\langle 0|\right]$$

からも直接

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{R_A}\left[\hat{\rho}_M\right] = \mathop{\mathrm{Tr}}_{R_A}\left[|0\rangle\langle 0|\right]$$

を確認することもできる．$\hat{\rho}_M$ におけるエネルギー密度の期待値も

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{T}_{++}(x^+)\hat{\rho}_M\right] = \frac{1}{4}\left(\partial_+\lambda_A(x^+)\right)^2 \tag{9.21}$$

となるため，測定によって量子場に注入されたエネルギーの期待値は

$$E_A = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x\lambda_A(x)\right)^2 dx \tag{9.22}$$

と求められる．これが QET の入力エネルギーである．

次に時間 T をかけて R_A の右側にある $x_{A+} < x_{B-}$ を満たす領域 $R_B = [x_{B-}, x_{B+}]$ に測定結果を送り，そこで測定結果に依存した以下のユニタリー操

作を量子場に行う．

$$\hat{U}_{bB} = U\left[(-1)^b \theta \lambda_B\right] = \exp\left[i(-1)^b \theta \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_B(x) \hat{\Pi}_+(x)\, dx\right]. \quad (9.23)$$

θ は後で決める実数パラメータであり，$\lambda_B(x)$ は R_B の中だけ非零の値をとる滑らかな実関数である．操作後の状態は

$$\hat{\rho}_{QET} = \sum_b \hat{U}_{bB} e^{-iT\hat{H}} \hat{M}_{bA} |0\rangle\langle 0| \hat{M}_{bA}^\dagger e^{iT\hat{H}} \hat{U}_{bB}^\dagger$$

で与えられる．この操作の後 R_B に局在しているエネルギー演算子を以下の式で定義する．

$$\hat{H}_B = \int_{-\infty}^{\infty} w_B(x) \hat{T}_{++}(x) dx.$$

ここで $w_B(x)$ は $x \in R_B$ に対しては

$$w_B(x) = 1$$

であり，その R_B の外では零へ急激に減衰する関数である．ここで R_B は局所的真空状態の領域になっていることに注意しよう．R_B のエネルギー零の量子場から取り出されるエネルギーは

$$E_B = E_A - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{QET} \hat{H}\right] = -\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{QET} \hat{H}_B\right]$$

で与えられるが，それは以下のように計算される．

$$E_B = -\sum_b \langle 0| \hat{M}_{bA}^\dagger e^{iTH} \left(\hat{U}_{bB}^\dagger \hat{H}_B \hat{U}_{bB}\right) e^{-iTH} \hat{M}_{bA} |0\rangle.$$

この式に現れる $\hat{U}_{bB}^\dagger \hat{H}_B \hat{U}_{bB}$ は (9.19) 式を用いると

$$\hat{U}_{bB}^\dagger \hat{H}_B \hat{U}_{bB} = H_B - (-1)^b \theta \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \lambda_B(x) \hat{\Pi}_-(x)\, dx + \frac{\theta^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x \lambda_B(x)\right)^2 dx$$

と計算できる．この $\hat{U}_{bB}^\dagger \hat{H}_B \hat{U}_{bB}$ に対するハイゼンベルグ演算子は含まれている各演算子を時間発展させることで以下のように得られる．

$$\begin{aligned} e^{iT\hat{H}} \hat{U}_{bB}^\dagger \hat{H}_B \hat{U}_{bB} e^{-iT\hat{H}} = & \int_{-\infty}^{\infty} w_B(x-T) \hat{T}_{++}(x)\, dx \\ & - (-1)^b \theta \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \lambda_B(x-T) \hat{\Pi}_+(x)\, dx \\ & + \frac{\theta^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x \lambda_B(x)\right)^2 dx. \end{aligned}$$

ここで R_A と R_B の添え字の付いた関数の重なりはないことを思い出そう．例えば

$$w_B(x)\lambda_A(x) = w_B(x-T)\lambda_A(x) = 0$$

などが成り立つ．このため $\hat{G}_A$ と $e^{iT\hat{H}}\hat{U}_{bB}^\dagger\hat{H}_B\hat{U}_{bB}e^{-iT\hat{H}}$ は交換することが保証されている．従って

$$\left[e^{iT\hat{H}}\hat{U}_{bB}^\dagger\hat{H}_B\hat{U}_{bB}e^{-iT\hat{H}}, \hat{M}_{bA}\right] = 0$$

が成り立つ．これらの性質と (9.2) 式及び

$$\sum_b (-1)^b \hat{M}_{bA}^\dagger \hat{M}_{bA} = -\sin\left(2\hat{G}_A\right)$$

を使うと E_B は

$$E_B = \eta\theta - \frac{\xi}{4}\theta^2$$

と計算される．ここで η, ξ は以下で定義される実係数である．

$$\eta = -\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\lambda_B(x-T)\langle 0|\hat{\Pi}_+(x)\sin\left(2\hat{G}_A\right)|0\rangle dx,$$
$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x\lambda_B(x)\right)^2 dx.$$

ここで E_B を最大化する θ を選ぶと，その値は $\theta = \frac{2\eta}{\xi}$ と決まる．そして R_B の量子場から取り出されるエネルギーは

$$E_B = \frac{\eta^2}{\xi}$$

と計算される．η は更に具体的に計算することができる．(9.16) 式のコヒーレント状態を用いると

$$\begin{aligned}\eta &= -\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\lambda_B(x-T)\langle 0|\hat{\Pi}_+(x)\sin\left(2\hat{G}_A\right)|0\rangle dx \\ &= \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\lambda_B(x-T)\langle 0|\Pi_-(x)\left(|2\lambda_A\rangle - |-2\lambda_A\rangle\right)dx\end{aligned}$$

と書けるが，

$$\langle 0|\hat{\Pi}_+(x)|\lambda\rangle = i\langle 0|\lambda\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\langle 0|\hat{\Pi}_+(x)\hat{\Pi}_+(x')|0\rangle\lambda(x')dx'$$

という公式を用いると

$$\eta = -\frac{\langle 0|2\lambda_A\rangle}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_A(x_A)\lambda_B(x_B)}{(x_B - x_A + T)^3}dx_A dx_B$$

と計算できる．これを E_B に代入すると

$$E_B = \frac{|\langle 0|2\lambda_A\rangle|^2}{\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x\lambda_B(x)\right)^2 dx}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_A(x_A)\lambda_B(x_B)}{(x_B - x_A + T)^3}dx_A dx_B\right)^2 \tag{9.24}$$

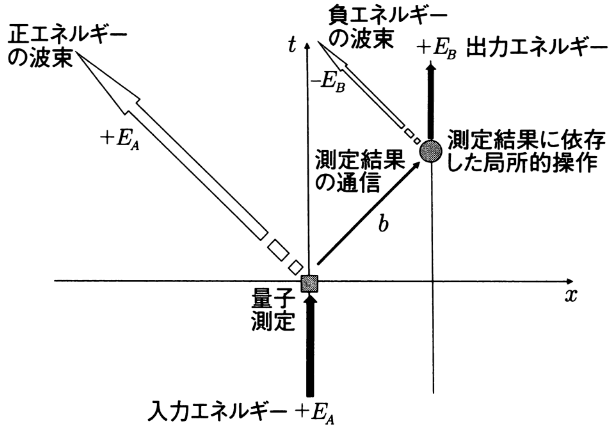


図 9.1　量子場を使った量子エネルギーテレポーテーションの概念図.

となる．ここで

$$|\langle 0|2\lambda_A\rangle|^2 = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\tilde{\lambda}_A(\omega)\right|^2 \omega d\omega\right)$$

である．この QET プロトコルを時空上で表したのが図 9.1 である．この図では場の理論のファインマン図 (Feynman diagram) のように時空を伝搬してきた情報 μ が正エネルギー $+E_B$ と負エネルギー $-E_B$ を対生成しているように表現されており，量子情報物理学の本質の一端をよく表現している．(9.24) 式の右辺において $\lambda_B(x)$ を定数倍しても E_B は変化しないが，$\lambda_A(x)$ の振幅を大きくすると $|\langle 0|2\lambda_A\rangle|^2$ の因子ために指数関数的に小さくなる．この減衰因子は連続値の測定結果を出力する一般測定の QET を考えると指数的減衰から冪的減衰項に置き換わる [87]．これは真空状態の測定で零点揺らぎの情報をよりきめ細かく収集すると，転送できるエネルギーも大きくできることを意味している．この量子場の QET は量子ホール系のエッジ電流を用いると具体的に実験できる可能性が高い．エッジ電流はカイラルな 1 次元スカラー場で表現することができ，その基底状態は量子場の真空状態として記述されるためである．ナノスケールのコンデンサを用いたエッジ電流の揺らぎの測定機では数十マイクロメートル程度の距離で 100 マイクロ電子ボルト程度の E_B を転送できると予想されている [88]．またスクィーズド状態を用いる QET [89] ならば同じ程度の E_B を数百マイクロメートル程度の距離まで転送することも期待できる．

9.6　ブラックホールと QET

前節で考えた $\hat{\varphi}$ の QET プロトコルを重力崩壊に適用すると興味深い思考実験が可能となる．まず時空の半古典近似描像を維持するために N 個の同じ質量零スカラー場 $\hat{\varphi}_n(n = 1 \sim N)$ を用意する．ラージ N 極限 $(N \to \infty)$ を考え

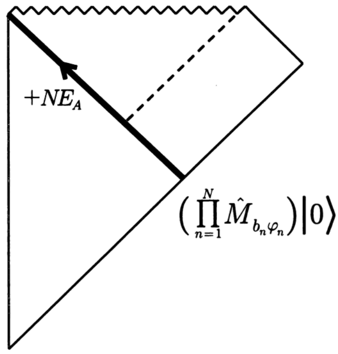


図 9.2　量子エネルギーテレポーテーションを用いたブラックホール生成の思考実験．測定によって作られた正エネルギーの波束が重力崩壊をしてブラックホールを作る．

れば，物質場は量子的であろうとも時空の古典近似は正当化される．以降では十分大きいが有限の自然数である N を想定する．各 $\hat{\varphi}_n$ の初期状態として通常の真空状態 $|0\rangle$ をとろう．第 7 章 7.1 節や第 8 章 8.3 節のように，4 次元時空の球対称な重力崩壊の理論が背景にあり，これを 2 次元の重力理論で記述しているとみなす．$x\sim\infty$ を半径無限大の領域とし，その平坦領域で前節の (9.12) 式，(9.13) 式の測定演算子の測定を全ての $\hat{\varphi}_n$ に対して行う．1 つの $\hat{\varphi}_n$ からは 1 ビットの測定結果 $b_n=0,1$ が出力される．測定結果を並べると合計 N ビットの $(b_1,b_2,\cdots,b_N)$ というビット列を得る．ここで (9.15) 式からこのビット列はランダムであることが保証されている．測定結果 b_n に対応する $\hat{\varphi}_n$ の測定後状態は (9.17) 式，(9.18) 式の $|\psi_{b_n}\rangle$ で与えられる．$b_n=0,1$ のどちらの状態でも (9.20) 式で与えられる同じ正エネルギー分布を持つ左進行波の波束が励起される．1 つ当たりのエネルギー量は (9.22) 式の E_A となる．従って合計 NE_A のエネルギーが重力崩壊して質量 $M_{bh}=NE_A$ のブラックホールを形成する．これは 4 次元時空において地平面面積 $A_{bh}=16\pi G^2M_{bh}^2$ に比例したブラックホールエントロピー $S_{bf}=\frac{A_{bf}}{4G}$ と温度 $T_{bf}=1/(8\pi GM_{bf})$ のホーキング輻射が現れることに対応する．今の設定の特徴はどの $(b_1,b_2,\cdots,b_N)$ に対しても全く同じエネルギー分布の波束が生成され，その結果全く同じブラックホールの古典時空を生み出すという点にある．この過程のペンローズ図を図 9.2 に与えた．ブラックホール形成後，空間無限遠方で (9.23) 式の操作を局所的真空にある各 $\hat{\varphi}_n$ に施すと，QET の効果として正のエネルギー $E_B=\frac{\eta^2}{\xi}$ が場から外部に汲みだされ，同時に負のエネルギー $E_\varphi=-\frac{\eta^2}{\xi}$ を持つ波束が生成されてブラックホールに向かって落ちていく．合計 $-N\frac{\eta^2}{\xi}$ の負エネルギーがブラックホールに吸収されることで地平面は後退し，S_{bh} も減少する．この過程のペンローズ図を図 9.3 で与えた．

地平面内部に入ったこの負エネルギーは重力崩壊を起こした物質の正エネル

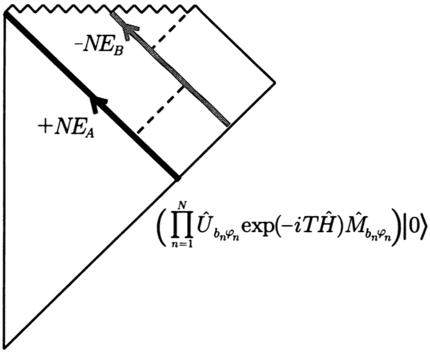


図 9.3 量子エネルギーテレポーテーションを用いた思考実験．ブラックホールが形成された後に測定結果の情報を用いて負のエネルギー波束を生成できる．それがブラックホールに吸収されると地平面は収縮する．

ギー NE_A の一部と対消滅もできる．通常のホーキング輻射のエネルギーと同様に，E_B をブラックホール内部の正エネルギーの一部が一種のトンネル効果のように地平面外部に抜け出たものとファインマン流に解釈することもできる．ファインマン図では負のエネルギーを持った粒子が時間の正の向きに進むのを，正のエネルギーを持った反粒子が時間を遡るとも解釈できる．同様に QET に現れる負エネルギーの波束を時間逆行する正エネルギーの波束と解釈すると，ブラックホールの中の正エネルギーが時空上をジグザグに運動して外部領域にテレポーテーションしてきたのが E_B であるという見方もできる．

熱力学の観点からは QET はブラックホール時空上でのマクスウェルの悪魔（デーモン）と同様の操作をしているともみなせる．通常のホーキング輻射生成ではブラックホールエントロピー S_{bf} の減少分はホーキング輻射の熱的エントロピーで補われて，全系において熱力学第 2 法則は破れなかった．QET ではホーキング輻射と異なり，取り出される E_B は一般的に熱的ではない．つまり S_{bf} の減少分を補うエントロピーを持つ熱的存在が見当たらない．しかし測定結果 $(b_1, b_2, \cdots, b_N)$ を記憶するメモリー系をきちんと物理的に考えてデーモンの自由度とみなし，そのデーモンとブラックホールの間の相互情報量まで取り入れれば，情報熱力学における一般化された熱力学第 2 法則[91] は破らないと考えられる．ここで測定者がエネルギーを局所的真空から取り出す前に $(b_1, b_2, \cdots, b_N)$ の情報を間違って失ってしまったとしよう．すると負エネルギー波束を作ることができなくなるため，地平面面積 A_{bh} を減少させられない．しかたなく勝手に $(b'_1, b'_2, \cdots, b'_N)$ を選んで各 $\hat{\varphi}_n$ に対して $\hat{U}_{b'_n B}$ を実行してもうまくいかない．1 つの $\hat{\varphi}_n$ に対して間違った $\hat{U}_{b'_n B}$ の操作をすると $-\frac{\eta^2}{\xi}$ の負エネルギーではなく $3\frac{\eta^2}{\xi}$ の正エネルギーの波束が生成される．平均すると $\frac{1}{2}\left(-\frac{\eta^2}{\xi}+3\frac{\eta^2}{\xi}\right)=\frac{\eta^2}{\xi}$ のエネルギーの波束が作られる．従って正しい測定結果と無関係なランダムビット列 $(b'_1, b'_2, \cdots, b'_N)$ を選んで $\hat{U}_{b'_n B}$ を施すと合計で

$N\frac{\eta^2}{\xi}$ の正エネルギーがブラックホールの吸収される．従って A_{bh} は逆に増加してしまう．従って測定結果のビット列 $(b_1, b_2, \cdots, b_N)$ の情報とブラックホールエントロピー $S_{bf} = A_{bh}/(4G)$ の間には深い関係が存在している．

QET はブラックホールの熱的緩和過程についても興味深い特徴を露わにする．半径 r_h のブラックホールの重力的自由度の熱的緩和では r_{pl} をプランク長さとして $O\left(r_h \ln \frac{r_h}{r_{pl}}\right)$ 程度の典型的な緩和時間スケールの存在が示唆されている[92]．しかし対照的なことに QET ではブラックホール形成の時刻から $\hat{U}_{b_n B}$ を行う時刻までの経過時間 T をいくら大きくしても，(9.24) 式の E_B は冪的減衰しか起こさない．特徴的な時間スケールでの指数関数的減衰を起こさないため，地平面外部領域の $\hat{\varphi}_n$ の揺らぎの緩和過程には典型的時間スケールが存在しないことを意味している．$(b_1, b_2, \cdots, b_N)$ という測定結果に対応する波束が重力崩壊して作られたブラックホールの外部の時空計量は全く $(b_1, b_2, \cdots, b_N)$ の依存性をもたないが，$\hat{\varphi}_n$ の揺らぎには長時間生き残る $(b_1, b_2, \cdots, b_N)$ に依存した量子的な個性（ブラックホールの毛，black hole hair）が含まれていることを意味している[90]．

付録 A
連続系の状態トモグラフィ

この付録では (1.4) 式を証明する．見通しをよくするために，まずは量子状態 $\hat{\rho}$ に対してウィグナー関数 $W(q,p)$ を導入しよう．

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle q - u/2|\hat{\rho}|q + u/2\rangle \exp(ipu)\, du.$$

ここで $|q\rangle$ は位置演算子 $\hat{q}$ の固有値 q に対する固有状態である．$W(q,p)$ は (q,p) の位相空間に対する疑似古典的確率として知られている．特に $\hat{q}$ と $\hat{p}$ の冪乗同士の積に関しては正規順序積しか含まれない演算子

$$G(\hat{q},\hat{p}) = g_0 + g_{10}\hat{q} + g_{01}\hat{p} + g_{20}\hat{q}^2 + g_{11}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) + \cdots$$

に対しては，

$$\mathrm{Tr}\left[G(\hat{q},\hat{p})\hat{\rho}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(q,p)W(q,p)dqdp \tag{A.1}$$

という関係が成り立つ．$W(q,p)$ からもとの $\hat{\rho}$ を

$$\langle q|\hat{\rho}|q'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{q+q'}{2}, p\right)\exp\left(ip(q-q')\right)dp \tag{A.2}$$

という公式を用いて再現することも可能なため，情報量的には $W(q,p)$ は $\hat{\rho}$ と等価である．ここで

$$\hat{A}(\theta) = \hat{q}\cos\theta + l^2\hat{p}\sin\theta$$

という物理量に対する測定値の確率密度分布

$$P(\theta,a) = \mathrm{Tr}\left[\delta\left(\hat{A}(\theta) - a\right)\hat{\rho}\right]$$

を考えよう．

$$\delta\left(\hat{A}(\theta) - a\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ib\left(\hat{q}\cos\theta + l^2\hat{p}\sin\theta - a\right)\right] db$$

という定義を考えると $\delta\left(\hat{A}(\theta)-a\right)$ には $\hat{q}$ と $\hat{p}$ の正規順序積しか含まれないことが分かるため，(A.1) 式から，この分布は

$$P(\theta,a)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(q\cos\theta+l^2p\sin\theta-a\right)W(q,p)dqdp \qquad \text{(A.3)}$$

とも書けることが分かる．$P(\theta,a)$ の a に関するフーリエ変換 $\int P(\theta,a)e^{i\eta a}da$ を考え，フーリエ変数 η がとれる領域を $0\leq\eta<\infty$ に制限しよう．そして

$$u=\eta\cos\theta, \qquad v=\eta\sin\theta$$

で定義される変数を用いて，それを u,v の関数

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\theta,a)e^{i\eta a}da \qquad \text{(A.4)}$$

として定義しよう．(A.3) 式を右辺に代入して a の積分を実行すると

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(q,p)\exp\left[i\left(qu+l^2pv\right)\right]dqdp$$

という表式を得る．(u,v) は R^2 の全ての点をとれるため，この式は $F(u,v)$ が $W(q,p)$ のフーリエ変換に対応している．従って逆フーリエ変換を使ってすぐに

$$W(q,p)=\frac{l^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\exp\left[-i\left(qu+l^2pv\right)\right]dudv$$

という関係式を得る．これと (A.4) 式を (A.2) 式に代入すると

$$\begin{aligned}\langle q|\hat{\rho}|q'\rangle=&\frac{l^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}da\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}dv\int_{-\infty}^{\infty}dpP(\theta,a)\\&\times\exp\left[i\left(a\sqrt{u^2+v^2}-\frac{q+q'}{2}u+p(q-q'-l^2v)\right)\right]\end{aligned}$$

を得る．ここで $\eta=\sqrt{u^2+v^2}$ を使っている．またここで θ は $\mathrm{arccot}\left(\frac{u}{v}\right)$ という u,v の関数である．p 積分を実行すると v に関するデルタ関数が現れ，そのために簡単に v 積分も実行できる．その結果

$$\begin{aligned}\langle q|\hat{\rho}|q'\rangle=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}da\int_{-\infty}^{\infty}duP\left(\mathrm{arccot}\left(\frac{l^2u}{q-q'}\right),a\right)\\&\times\exp\left[i\left(a\sqrt{u^2+\left(\frac{q-q'}{l^2}\right)^2}-\frac{q+q'}{2}u\right)\right]\end{aligned}$$

という量子状態トモグラフィの (1.4) 式が証明される．

付録 B
シュミット分解

シュミット分解の証明の概略を与える．同じヒルベルト空間の次元を持つ 2 つの量子系 A, B の合成系の純粋状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ は必ず

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_n \sqrt{p_n}|u_n\rangle_A|v_n\rangle_B \tag{B.1}$$

という形に分解できる．ここで非負数 p_n は $\sum_n p_n = 1$ を満たす確率分布であり，$\{|u_n\rangle_A\}, \{|v_n\rangle_B\}$ は A, B のある正規完全直交基底である．証明は以下の通りである．まず勝手に選んだ正規完全直交基底 $\{|u'_n\rangle_A\}, \{|v'_n\rangle_B\}$ を用いて $|\Psi\rangle_{AB}$ を

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_n P_{nm}|u'_n\rangle_A|v'_m\rangle_B$$

と展開しよう．行列 $P = [P_{nm}]$ は 2 つのユニタリー行列 U, V 及び非負対角行列 D で

$$P = UDV \tag{B.2}$$

と特異値分解ができる．ここで $D = \left[\sqrt{p_n}\delta_{nm}\right]$ と書いて，$P_{nm} = \sum_l \sqrt{p_l}U_{nl}V_{lm}$ を $|\Psi\rangle_{AB}$ に代入し，$|u_n\rangle_A = \sum_{n'} U_{n'n}|u'_{n'}\rangle_A$，$|v_n\rangle_B = \sum_{n'} V_{nn'}|v'_{n'}\rangle_B$ で正規完全直交基底 $\{|u_n\rangle_A\}, \{|v_n\rangle_B\}$ を定義すれば (B.1) 式が示せる．(B.2) 式は非負演算子 $P^\dagger P$ が零固有値も持たなければ証明は簡単にできる．エルミート行列 $P^\dagger P$ はあるユニタリー行列 U で対角化できるが，その対角行列は正の固有値を持つある対角行列 D の 2 乗で書ける．

$$P^\dagger P = UD^2U^\dagger = (UDU^\dagger)^2.$$

従って $\sqrt{P^\dagger P}$ も同じユニタリー行列 U を使って $\sqrt{P^\dagger P} = UDU^\dagger$ と対角化される．ここで $\left(P^\dagger P\right)^{-1/2} P$ はユニタリー行列になることに注目すると $V = U^\dagger \left(P^\dagger P\right)^{-1/2} P$ でユニタリー行列 V を定義すれば

$$P = \sqrt{P^\dagger P}\left(P^\dagger P\right)^{-1/2} P = UDU^\dagger \left(P^\dagger P\right)^{-1/2} P = UDV$$

から (B.2) 式が得られる．$P^\dagger P$ が零固有値を持つ場合も，実パラメータ ϵ に依存して，$\epsilon > 0$ では零固有値を持たず，そして $\epsilon \to 0$ で $P_\epsilon^\dagger P_\epsilon \to P^\dagger P$ となる行列 P_ϵ を用いれば (B.2) 式を満たす V を見つけることができる．B のヒルベルト空間の次元が A の次元より大きくても，非正方行列に対する特異値分解を用いて (B.1) 式の形に $|\Psi\rangle_{AB}$ を展開することも示される．

付録 C
フォンノイマンエントロピーの凹性の証明

最初に2つの量子状態 $\hat{\rho}$ と $\hat{\rho}_o$ に対して定義される相対エントロピー

$$R(\hat{\rho}||\hat{\rho}_o) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\right] - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}_o\right]$$

は常に負にならないことを示す．$\hat{\rho}$ と $\hat{\rho}_o$ のスペクトル分解をそれぞれ

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |u_j\rangle\langle u_j|, \qquad \hat{\rho}_o = \sum_j q_j |v_j\rangle\langle v_j|$$

と書くと，$R(\hat{\rho}||\hat{\rho}_o)$ は以下のように計算される．

$$\begin{aligned} R(\hat{\rho}||\hat{\rho}_o) &= \sum_j p_j \ln p_j - \sum_j p_j \langle u_j|\ln\hat{\rho}_o|u_j\rangle \\ &= \sum_j p_j \ln p_j - \sum_{jk} p_j \langle u_j|v_k\rangle \ln q_k \langle v_k|u_j\rangle \\ &= \sum_j p_j \left(\ln p_j - \sum_k |\langle u_j|v_k\rangle|^2 \ln q_k\right) \end{aligned}$$

ここで対数関数 $-\ln(x)$ が確率分布 p_μ と正の実数 x_μ に関する凸性 (convexity)：

$$-\sum_\mu p_\mu \ln x_\mu \geq -\ln\left(\sum_\mu p_\mu x_\mu\right)$$

を持っていることから

$$-\sum_k |\langle u_j|v_k\rangle|^2 \ln q_k \geq -\ln\left(\sum_k |\langle u_j|v_k\rangle|^2 q_k\right)$$

が成り立っている．ここで

$$\bar{q}_j = \sum_k |\langle u_j|v_k\rangle|^2 q_k$$

と置くと，$\bar{q}_j \geq 0$ で，かつ

$$\sum_j \bar{q}_j = \sum_k q_k = 1$$

を満たしているため，$\bar{q}_j$ は確率分布であることが分かる．従って

$$R\left(\hat{\rho}||\hat{\rho}_o\right) \geq -\sum_j p_j \ln\left(\frac{\bar{q}_j}{p_j}\right)$$

が示せた．右辺は古典的な相対エントロピーと呼ばれる．ここで正の x に対して

$$-\ln x \geq 1 - x$$

が成り立つため，

$$R\left(\hat{\rho}||\hat{\rho}_o\right) \geq \sum_j p_j \left(1 - \frac{\bar{q}_j}{p_j}\right) = \sum_j \left(p_j - \bar{q}_j\right) = 0$$

となり，$R\left(\hat{\rho}||\hat{\rho}_o\right) \geq 0$ が示せた．ここで量子系 A と B の合成系の状態 $\hat{\rho}_{AB}$ とその縮約状態

$$\hat{\varrho}_A = \underset{B}{\mathrm{Tr}}\left[\hat{\rho}_{AB}\right], \qquad \hat{\varsigma}_B = \underset{A}{\mathrm{Tr}}\left[\hat{\rho}_{AB}\right]$$

を考えよう．そして $R\left(\hat{\rho}_{AB}||\hat{\varrho}_A \otimes \hat{\varsigma}_B\right)$ を計算するとフォンノイマンエントロピー

$$V\left(\hat{\rho}\right) = -\,\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\right]$$

を用いて

$$R\left(\hat{\rho}_{AB}||\hat{\varrho}_A \otimes \hat{\varsigma}_B\right) = V\left(\hat{\varrho}_A\right) + V\left(\hat{\varsigma}_B\right) - V\left(\hat{\rho}_{AB}\right)$$

となることが分かる．$R\left(\hat{\rho}_{AB}||\hat{\varrho}_A \otimes \hat{\varsigma}_B\right) \geq 0$ から

$$V\left(\hat{\varrho}_A\right) + V\left(\hat{\varsigma}_B\right) \geq V\left(\hat{\rho}_{AB}\right) \tag{C.1}$$

が成り立つ．$\hat{\rho}_{AB}$ が B の完全正規直交系 $\{|n\rangle_B\}$ と確率分布 p_n 及び n に依存した A の状態 $\hat{\rho}_A(n)$ を用いて

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_n p_n \hat{\rho}_A(n) \otimes |n\rangle_B\langle n|_B$$

という形になっているとしよう．各縮約状態は

$$\hat{\varrho}_A = \sum_n p_n \hat{\rho}_A(n), \qquad \hat{\varsigma}_B = \sum_n p_n |n\rangle_B\langle n|_B$$

と計算される．これらから各フォンノイマンエントロピーを求めると

$$V\left(\hat{\rho}_{AB}\right) = -\sum_n p_n \ln p_n + \sum_n p_n V\left(\hat{\rho}(n)\right),$$

$$V\left(\hat{\varrho}_A\right) = V\left(\sum_n p_n \hat{\rho}(n)\right),$$

$$V\left(\hat{\varsigma}_B\right) = -\sum_n p_n \ln p_n$$

となる．これらを (C.1) 式に代入することにより

$$V\left(\sum_n p_n \hat{\rho}(n)\right) \geq \sum_n p_n V\left(\hat{\rho}(n)\right)$$

という凹性が証明される．

付録 D
トレースノルムが行列凸関数である証明

一般にトレースノルム $\left\|\hat{X}\right\|_1$ は

$$\left\|\hat{X}\right\|_1 = \max_{\hat{U}} \left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}\hat{X}\right]\right| \tag{D.1}$$

とも表現できることが以下のように分かる．ここで $\left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}\hat{X}\right]\right|$ の最大化は全てのユニタリー演算子 $\hat{U}$ に関して行われる．(D.1) 式の証明は任意の演算子 $\hat{X}$ に対しての極分解

$$\hat{X} = \hat{U}_X \hat{R}_X$$

を考えると簡単である．ここで $\hat{R}_X$ は $\hat{X}$ から決まるエルミート演算子であり，$\hat{U}_X$ はユニタリー演算子である．特に $\sqrt{\hat{X}^\dagger\hat{X}}$ が逆演算子を持つ場合には，単純に

$$\hat{U}_X = \hat{X}\left(\sqrt{\hat{X}^\dagger\hat{X}}\right)^{-1}, \qquad \hat{R}_X = \sqrt{\hat{X}^\dagger\hat{X}}$$

によって各演算子は簡単に求められる．ここで $\hat{U}' = \hat{U}\hat{U}_X$ と置くと

$$\max_{\hat{U}} \left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}\hat{X}\right]\right| = \max_{\hat{U}} \left|\mathrm{Tr}\left[\left(\hat{U}\hat{U}_X\right)\hat{R}_X\right]\right| = \max_{\hat{U}'} \left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}'\hat{R}_X\right]\right|$$

という関係が成り立つ．$\hat{U}'$ と $\hat{R}_X$ のスペクトル分解を

$$\hat{U}' = \sum_n e^{i\theta_n}|u_n\rangle\langle u_n|, \qquad \hat{R}_X = \sum_n r_n|r_n\rangle\langle r_n|$$

とすると

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}'\hat{R}_X\right]\right| &= \left|\sum_{nn'} r_{n'}e^{i\theta_n}\left|\langle u_n|r_{n'}\rangle\right|^2\right| \le \sum_{nn'} r_{n'}\left|e^{i\theta_n}\right|\left|\langle u_n|r_{n'}\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{n'} r_{n'}\left(\sum_n \left|\langle u_n|r_{n'}\rangle\right|^2\right) = \sum_{n'} r_{n'} = \left|\mathrm{Tr}\left[\hat{R}_X\right]\right| = \left\|\hat{X}\right\|_1\end{aligned}$$

と計算されることから，$\left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}'\hat{R}_X\right]\right|$ は $\hat{U}'=\hat{I}$ の時に最大値 $\left\|\hat{X}\right\|_1$ をとることが分かる．ここで $\hat{R}_X$ の非負性 $(r_{n'}\geq 0)$ を使っている．従って (D.1) 式が証明された．これを用いると

$$\begin{aligned}\left\|\sum_n p_n\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right\|_1 &= \max_{\hat{U}}\left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}\sum_n p_n\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right]\right| \\ &\leq \sum_n p_n \max_{\hat{U}}\left|\mathrm{Tr}\left[\hat{U}\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right]\right| \\ &= \sum_n p_n\left\|\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right\|_1\end{aligned}$$

という計算からこのトレースノルムの凸性

$$\left\|\sum_n p_n\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right\|_1 \leq \sum_n p_n\left\|\left(\hat{\rho}_{nAB}\right)^{T_A}\right\|_1$$

が証明される．

付録 E
ガウス状態のネガティビティの公式の導出

ここでは (4.68) 式のガウス状態のネガティビティの公式を求める[37]．そのためにまず準備から入る．2 つの調和振動子系で量子的な線形正準変換が定義できる．(4.66) 式の $\hat{\eta}$ に対して定義されたユニタリー演算子 $\hat{U}=\exp\left(i\hat{\eta}^\dagger\hat{\eta}\right)$ は 10 個の独立パラメータを持つ連続群を成す．$\hat{X}$ にこのユニタリー変換を作用させると 4 次元実行列 S を用いて

$$\hat{U}\hat{X}\hat{U}^\dagger = S\hat{X}$$

と表現される．ここで S は $\det S = 1$ を満たす．以降では S に対応する $\hat{U}$ を $\hat{U}(S)$ と表記する．$\hat{X}' = \hat{U}(S)\hat{X}\hat{U}(S)^\dagger$ というユニタリー変換で (4.65) 式の正準交換関係は保たれるため，$\hat{X}'$ の各成分も新しい正準座標演算子になっている．従って

$$-iJ = \left[\hat{X}', \hat{X}'^T\right] = S\left[\hat{X}, \hat{X}^T\right]S^T = -iSJS^T$$

という計算から

$$SJS^T = J$$

という関係が成り立つ．この関係は S が実シンプレックティック群 $SL(4,R)$ を成すことを示している．$\hat{U}(S)$ はそのユニタリー表現になっている．なお S がこの $SL(4,R)$ の元ならば，S^T と S^{-1} も $SL(4,R)$ の元である．また新しい座標での共分散行列 M' は元の座標での M と

$$M' = SMS^T$$

という関係にある．つまり量子力学でも共分散行列は古典力学と同様の変換則に従うことが分かる．この事実を踏まえて古典的な $SL(4,R)$ に関するウィリアムソンの定理 (Williamson theorem)[93] を用いて M を簡単化する．この定理は $M \geq 0$ の実対称行列に対してある $SL(4,R)$ の元 S が存在して，SMS^T

を以下のような形に対角化することが常に可能であることを主張する．

$$SMS^T = \begin{bmatrix} \nu_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_- \end{bmatrix}. \tag{E.1}$$

ここで $\nu_\pm$ は非負の実数である．ここで A と B を入れ替えることのできる離散的な変換の自由度があるため，一般性を失わずに $\nu_+ \geq \nu_-$ と仮定できる．

ウィリアムソンの定理の証明の概略は以下の通りである．最初に $SL(4,R)$ の元である局所的操作 $S_A \otimes S_B$ だけで共分散行列 M をどこまで簡単化できるかを考えよう．2 次元実回転行列 R_A, R_B を用いた

$$S_1 = \begin{bmatrix} R_A & 0 \\ 0 & R_B \end{bmatrix}$$

という行列は J が回転変換に対して不変な行列であるために $SL(4,R)$ の元である．まずこれを一般の共分散行列

$$M = \begin{bmatrix} M_A & M_C \\ M_C^T & M_B \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

に作用させると

$$M_1' = S_1 M S_1^T = \begin{bmatrix} R_A M_A R_A^T & R_A M_C R_B^T \\ R_B M_C^T R_A^T & R_B M_B S_B^T \end{bmatrix}$$

に変化する．ここで R_A, R_B を実対称行列 M_A, M_B が対角化するように決定しよう．

$$M_1' = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a_+ & 0 \\ 0 & a_- \end{matrix} & R_A M_C R_B^T \\ R_B M_C^T R_A^T & \begin{matrix} b_+ & 0 \\ 0 & b_- \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

M_A, M_B が非負行列であることから，M_A, M_B の固有値 $a_\pm, b_\pm$ は全て非負である．次に $SL(4,R)$ の元である

$$S_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{a_-}{a_+}\right)^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a_+}{a_-}\right)^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{b_-}{b_+}\right)^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{b_+}{b_-}\right)^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

というスケール変換を行うと，$a = \sqrt{a_+ a_-} \geq 0, b = \sqrt{b_+ b_-} \geq 0$ として

$$M_2' = S_2 S_1 M S_1^T S_2^T = \begin{bmatrix} aI & M_C' \\ M_C'^T & bI \end{bmatrix}$$

という形まで簡単化できる．ここで実行列 M_C' は常に 2 つの回転行列 R_1, R_2 を使って

$$R_1 M_C' R_2^T = \begin{bmatrix} c_+ & 0 \\ 0 & c_- \end{bmatrix}$$

と対角化できる．この R_1, R_2 から作られる $SL(4,R)$ の元

$$S_3 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

を M_2' に作用させると，$S_{local} = S_3 S_2 S_1$ として

$$M_{sf} = S_{local} M S_{local}^T = \begin{bmatrix} a & 0 & c_+ & 0 \\ 0 & a & 0 & c_- \\ c_+ & 0 & b & 0 \\ 0 & c_- & 0 & b \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

という形まで簡単化できる．この形は共分散行列の標準形と呼ばれ，各部分系の局所的操作だけで到達できる最も簡単化された行列である．また M_{sf} の固有値は

$$\frac{1}{2}\left[a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c_+^2}\right], \quad \frac{1}{2}\left[a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c_-^2}\right]$$

の 4 つなので，M_{sf} の非負性条件は以下のように書ける．

$$M_{sf} \geq 0 \iff a \geq 0,\ b \geq 0,\ ab \geq c_\pm^2. \tag{E.5}$$

一般の共分散行列 M とそれに対応する標準形行列 M_{sf} は局所的回転行列と (E.3) 式の局所的スケール変換だけで行き来できるため，行列式に関して

$$\det M_A = a^2, \tag{E.6}$$

$$\det M_B = b^2, \tag{E.7}$$

$$\det M_C = c_+ c_-, \tag{E.8}$$

$$\det M = \left(ab - c_+^2\right)\left(ab - c_-^2\right) \tag{E.9}$$

という関係が成り立つ．このことは後の計算で大変便利である．非局所的な行列

$S_{nonlocal}$

$$= \begin{bmatrix} I\cos\theta_A\cosh\omega_A + \sigma_3\cos\phi_A\sinh\omega_A & I\sin\theta_A\cosh\omega_A + \sigma_3\sin\phi_A\sinh\omega_A \\ I\sin\theta_B\cosh\omega_B + \sigma_3\sin\phi_B\sinh\omega_B & I\cos\theta_B\cosh\omega_B + \sigma_3\cos\phi_B\sinh\omega_B \end{bmatrix} \tag{E.10}$$

を使用すると標準形行列 M_{sf} は (E.1) 式の右辺の対角形に変換できる．$S_{nonlocal}$ が $SL(4,R)$ の元になるように，6 個の実パラメータのうち $\theta_A, \theta_B, \phi_A, \phi_B$ の 4 つは

$$0 \le \frac{\sin(\theta_A + \theta_B)}{\sin(\phi_A + \phi_B)} \frac{\sin(\theta_A + \phi_B)}{\sin(\phi_A + \theta_B)} \le 1, \tag{E.11}$$

$$0 \le \frac{\sin(\theta_A + \theta_B)}{\sin(\phi_A + \phi_B)} \frac{\sin(\phi_A + \theta_B)}{\sin(\theta_A + \phi_B)} \le 1 \tag{E.12}$$

を満たす領域 Ω で定義されている．そしてこの $(\theta_A, \theta_B, \phi_A, \phi_B)$ に対して ω_A, ω_B は

$$\tanh^2\omega_A = \frac{\sin(\theta_A + \theta_B)}{\sin(\phi_A + \phi_B)} \frac{\sin(\theta_A + \phi_B)}{\sin(\phi_A + \theta_B)},$$

$$\tanh^2\omega_B = \frac{\sin(\theta_A + \theta_B)}{\sin(\phi_A + \phi_B)} \frac{\sin(\phi_A + \theta_B)}{\sin(\theta_A + \phi_B)}$$

で決定される．なお (E.10) 式の形の 2 つの $S_{nonlocal}$ の積も (E.10) 式の形になるため，4 つの実パラメータを持つ $S_{nonlocal}$ の集合は $SL(4,R)$ の部分群になっている．このパラメータをうまく定めると

$$S_{nonlocal} \begin{bmatrix} a & 0 & c_+ & 0 \\ 0 & a & 0 & c_- \\ c_+ & 0 & b & 0 \\ 0 & c_- & 0 & b \end{bmatrix} S_{nonlocal}^T = \begin{bmatrix} \nu_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_- \end{bmatrix}$$

を満たす $S_{nonlocal}$ が作れることによりウィリアムソンの定理は証明される．例えば $ab \ge c^2$ の時

$$M_{+sf} = \begin{bmatrix} aI & cI \\ cI & bI \end{bmatrix}$$

という形の標準形の非負演算子を考えよう．これに対しては

$$\theta = \arctan\left(\frac{2c}{a-b}\right)$$

で決まる角度 θ を用いて

$$S_+ = \begin{bmatrix} \cos\theta I & \sin\theta I \\ -\sin\theta I & \cos\theta I \end{bmatrix}$$

と定義される $SL(4,R)$ の元 S_+ により

$$S_+ M_{+sf} S_+^T$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(a+b+\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\right)I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\right)I \end{bmatrix}$$

と対角化される．また $ab \geq c^2$ の時

$$M_{-sf} = \begin{bmatrix} aI & c\sigma_3 \\ c\sigma_3 & bI \end{bmatrix}$$

で定義される標準形の非負演算子に対しては

$$\tanh(2\omega) = \frac{2c}{a+b}$$

で決まる ω を用いた

$$S_- = \begin{bmatrix} I\cosh\omega & -\sigma_3\sinh\omega \\ -\sigma_3\sinh\omega & I\cosh\omega \end{bmatrix}$$

により

$$S_- M_{-sf} S_-^T$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(a-b+\sqrt{(a+b)^4-4c^2}\right)I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(b-a+\sqrt{(a+b)^4-4c^2}\right)I \end{bmatrix}$$

と対角化される．

(E.1) 式の共分散行列は，古典力学において位相空間上の任意のガウス型確率分布関数 f に対してある正準座標系 (q_A, p_A, q_B, p_B) が存在し，温度が ν_+, ν_- であるギブス分布の積である

$$f(q_A, p_A, q_B, p_B) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\nu_+}\left(p_A^2+q_A^2\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2\nu_-}\left(p_B^2+q_B^2\right)\right)$$

という形に常に書けることを示している．この座標では

$$\langle q_A^2 \rangle = \langle p_A^2 \rangle = \nu_+, \qquad \langle q_B^2 \rangle = \langle p_B^2 \rangle = \nu_-$$

以外の共分散行列の成分は全て消えている．他の全ての古典的ガウス分布はこの f を線形正準変換して得られる．量子力学では不確定性関係があるために $\nu_\pm$ と温度の関係が古典系での関係式からずれはするが，この定理は同様のことを量子状態に対して保証してくれる．つまり任意のガウス状態 $\hat{\rho}_{AB}$ に対してある正準座標演算子 $(\hat{q}_A, \hat{p}_A, \hat{q}_B, \hat{p}_B)$ が存在して

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{Z(\beta_1)}\exp\left(-\frac{\beta_+}{2}\left(\hat{p}_A^2+\hat{q}_A^2\right)\right)\otimes\frac{1}{Z(\beta_2)}\exp\left(-\frac{\beta_-}{2}\left(\hat{p}_B^2+\hat{q}_B^2\right)\right) \tag{E.13}$$

という形に書ける．

$$\langle \hat{q}_A^2 \rangle = \langle \hat{p}_A^2 \rangle = \nu_+, \qquad \langle \hat{q}_B^2 \rangle = \langle \hat{p}_B^2 \rangle = \nu_-$$

という関係から，各温度の逆数 $\beta_\pm$ と対角成分 $\nu_\pm$ との間には

$$\nu_s = \frac{\cosh \beta_s + 1}{2 \sinh \beta_s}, \qquad (s = \pm) \tag{E.14}$$

という関係にある．高温領域 ($\beta_s \sim 0$) では (E.14) 式はもちろん古典論と同じ $\nu_s \sim \beta_s^{-1}$ という関係を与えるが，低温極限では不確定性関係が効いて $\nu_s \to 1/2$ となる．一般の温度領域において不確定性関係は ν_s を用いて以下のように議論できる．まず (4.67) 式の関係は $(\hat{q}'_A, \hat{p}'_A, \hat{q}'_B, \hat{p}'_B)$ という新しい座標で対角化された M' にも適用されるため，

$$M' + \frac{i}{2}J = \begin{bmatrix} \nu_+ & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & \nu_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_- & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \nu_- \end{bmatrix} \geq 0$$

という行列不等式を得る．この不等式は $M' + \frac{i}{2}J$ の全ての固有値が非負であることと等価である．固有値は $\nu_+ \pm 1/2, \nu_- \pm 1/2$ の 4 つであるため，これは

$$\nu_s \geq 1/2, \qquad (s = \pm) \tag{E.15}$$

を意味する．古典力学では $1/2 > \nu_s \geq 0$ も許されていたが，量子力学ではこの領域は不確定性関係のために現れない．

$\nu_\pm$ は以下の方法で簡単に計算できる．S が (E.2) 式の M を対角化すると，$\det S = 1$ から

$$\begin{aligned} \det [xJ - M] &= \det \left[S (xJ - M) S^T \right] \\ &= \det \left[xJ - \begin{bmatrix} \nu_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_- \end{bmatrix} \right] \\ &= \det \begin{bmatrix} -\nu_+ & x & 0 & 0 \\ -x & -\nu_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_- & x \\ 0 & 0 & -x & -\nu_- \end{bmatrix} \\ &= \left(x^2 + \nu_+^2 \right) \left(x^2 + \nu_-^2 \right) \end{aligned}$$

が成り立つ．一方同じ M を標準形にする S_{local} を用いると

$$\begin{aligned}\det\left[xJ-M\right] &= \det\left[S_{local}\left(xJ-M\right)S_{local}^{T}\right]\\ &= \det\left[xJ-M_{sf}\right]\\ &= \det\begin{bmatrix} -a & x & -c_{+} & 0\\ -x & -a & 0 & -c_{-}\\ -c_{+} & 0 & -b & x\\ 0 & -c_{-} & -x & -b\end{bmatrix}\\ &= x^4+\left(a^2+b^2+2c_{+}c_{-}\right)x^2+\left(ab-c_{+}^2\right)\left(ab-c_{-}^2\right)\\ &= x^4+\left(\det M_A+\det M_B+2\det M_C\right)x^2+\det M\end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$\nu_{+}^2+\nu_{-}^2=\det M_A+\det M_B+2\det M_C, \qquad \nu_{+}^2\nu_{-}^2=\det M$$

という関係が成り立っている．ここで

$$\Delta(M)=\det M_A+\det M_B+2\det M_C$$

を定義すると，

$$\left(x^2+\nu_{+}^2\right)\left(x^2+\nu_{-}^2\right)=0$$

という方程式の解は

$$x^4+\Delta(M)x^2+\det M=0$$

の解と一致する．従って

$$\nu_{\pm}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\Delta(M)\pm\sqrt{\Delta(M)^2-4\det M}\right)} \tag{E.16}$$

という公式を得る．

準備が整ったのでいよいよネガティビティの議論に入る．量子状態 $\hat{\rho}_{AB}$ にある 2 つの調和振動子 A, B のうち A に対しての部分転置 T_A を行おう．$\hat{\rho}_{AB}^{T_A}$ という演算子は規格化条件 $\mathrm{Tr}_{AB}\left[\hat{\rho}_{AB}^{T_A}\right]=1$ と各部分系の縮約状態 $\mathrm{Tr}_X\left[\hat{\rho}_{AB}^{T_A}\right]$ $(X=A,B)$ の非負性は満たしている．しかし $\hat{\rho}_{AB}$ が量子縺れ状態ならば $\hat{\rho}_{AB}^{T_A}$ には負の固有値が現れる．$\hat{\rho}_{AB}^{T_A}$ に対して

$$\chi^{T_A}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\mathop{\mathrm{Tr}}_{AB}\left[\hat{\rho}_{AB}^{T_A}\exp\left(i\left(x_1\hat{q}_A+x_2\hat{p}_A+x_3\hat{q}_B+x_4\hat{p}_B\right)\right)\right]$$

で特性関数を定義すると，

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{AB}\left[\hat{O}\hat{\rho}_{AB}^{T_A}\right]=\mathop{\mathrm{Tr}}_{AB}\left[\hat{O}^{T_A}\hat{\rho}_{AB}\right] \tag{E.17}$$

から (4.63) 式の特性関数と以下のような関係があるためである．

$$\chi^{T_A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \chi(x_1, -x_2, x_3, x_4).$$

$\chi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ がガウス関数ならば，$\chi^{T_A}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ もガウス関数である．従って $\hat{\rho}_{AB}$ がガウス状態であるならば，$\hat{\rho}_{AB}^{T_A}$ もガウス演算子であることも分かる．ここではまず $\hat{\rho}_{AB}$ の共分散行列を局所的 $SL(4,R)$ の元 S_{local} によって以下の標準形にしたとしよう．

$$M_{sf} = S_{local} M S_{local}^T = \begin{bmatrix} aI & c_0 I + c_3\sigma_3 \\ c_0 I + c_3\sigma_3 & bI \end{bmatrix}.$$

量子状態は対応するユニタリー変換 $U(S_{local})$ を用いて $\hat{\rho}'_{AB} = U(S_{local})\hat{\rho}_{AB}$ $U^\dagger(S_{local})$ に変化している．ここで $c_0 = (c_+ + c_-)/2, c_3 = (c_+ - c_-)/2$ としてある．部分転置は局所的ユニタリー操作後に行っても量子縺れには影響がないことを思い出そう．そこで共分散行列を標準形にしてから部分転置をとっても構わない．T_A に対して $\hat{p}_A$ だけが符号を反転することから，(E.17) 式の関係を用いると a, b, c_+ はこの部分転置で不変であるが c_- だけが符号を反転することが分かる．従って T_A は c_0 と c_3 を入れ替える効果をもたらす．

$$c_0 \iff c_3.$$

従ってガウス演算子 $\hat{\rho}'^{T_A}_{AB}$ に対する共分散行列 $M_{sf}^{T_A}$ は

$$M_{sf}^{T_A} = \begin{bmatrix} aI & c_3 I + c_0\sigma_3 \\ c_3 I + c_0\sigma_3 & bI \end{bmatrix}$$

で与えられる．ここで重要なことはもともとの共分散行列 M が非負行列であるため $a, b, c_\pm$ に (E.5) 式の関係が成り立つことである．T_A は c_- の符号を反転させるだけなので，M_{sf} が実対称非負行列ならば $M_{sf}^{T_A}$ も実対称非負行列であることが分かる．そしてこの逆も成り立つ．

$$M_{sf} \geq 0 \iff M_{sf}^{T_A} \geq 0.$$

従って $M_{sf}^{T_A}$ に対してもウィリアムソンの定理が適用できる．つまりある非局所的な $SL(4,R)$ の元 $S'_{nonlocal}$ が存在して

$$S'_{nonlocal} M_{sf}^{T_A} S'^{T}_{nonlocal} = \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_+ I & 0 \\ 0 & \tilde{\nu}_- I \end{bmatrix}$$

と対角化できる．ここで $\tilde{\nu}_\pm$ は非負の実数で $\tilde{\nu}_+ \geq \tilde{\nu}_-$ である．(E.6) 式–(E.9) 式から $c_- \to -c_-$ に対して $\det M_A, \det M_B, \det M$ は不変であることが分かるが，$\det M_C$ だけは符号を反転する．このことと (E.16) 式の公式を考慮すると，一般の共分散行列 M を $SL(4,R)$ で対角化した時の対角成分 $\tilde{\nu}_\pm$ は以下のように求めることができる．

$$\tilde{\nu}_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\tilde{\Delta}(M) \pm \sqrt{\tilde{\Delta}(M)^2 - 4\det M}\right)}. \tag{E.18}$$

ここで $\tilde{\Delta}(M)$ は M を (E.2) 式の形に表した時に

$$\tilde{\Delta}(M) = \det M_A + \det M_B - 2\det M_C \tag{E.19}$$

で定義される．ここで一般に $\tilde{\nu}_+ \geq \nu_-$ が示されるため，$\tilde{\nu}_+$ は (E.15) 式から負の値はとらない．一方 $\hat{\rho}_{AB}$ が分解可能状態の場合には $\tilde{\nu}_-$ も (E.15) 式を満たすが，量子縺れがある時には

$$0 \leq \tilde{\nu}_- < 1/2 \tag{E.20}$$

の領域の値をとることが分かる [39]．量子縺れの有無にかかわらず，$U\left(S'_{nonlocal}\right)$ $\hat{\rho}'^{T_A}_{AB} U\left(S'_{nonlocal}\right)^\dagger$ は (E.13) 式のように書けることがウィリアムソンの定理より保証されている．但し出てくる温度の逆数のうち $\tilde{\beta}_-$ は量子縺れ状態に対して特徴的な性質があり，

$$\tilde{\beta}_- = \beta_e + i\pi$$

という虚部を持つ．(E.14) 式にこの関係を代入すると

$$\tilde{\nu}_- = \frac{\cosh\beta_e - 1}{2\sinh\beta_e}$$

つまり

$$\beta_e = \ln\frac{1+2\tilde{\nu}_-}{1-2\tilde{\nu}_-}$$

という結果を得て，(E.20) 式を満たす $\tilde{\nu}_-$ に対して β_e は非負の実数値をとる．なお $\tilde{\nu}_+$ に対しては $\tilde{\beta}_+$ は非負の実数のままであり，正規の関係

$$\tilde{\nu}_+ = \frac{\cosh\tilde{\beta}_+ + 1}{2\sinh\tilde{\beta}_+}$$

を保っている．対応する (E.13) 式は

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}'_A + i\hat{p}'_A), \qquad \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}'_B + i\hat{p}'_B)$$

で定義される生成消滅演算子 $\hat{A}^\dagger, \hat{A}, \hat{B}^\dagger, \hat{B}$ を用いて

$$U(S'_{nonlocal})\,\hat{\rho}'^{T_A}_{AB} U^\dagger(S'_{nonlocal}) \propto \exp\left(-\tilde{\beta}_+\hat{A}^\dagger\hat{A}\right) \otimes \exp\left(-\left(\tilde{\beta}_e + i\pi\right)\hat{B}^\dagger\hat{B}\right)$$

と書き表される．$\exp\left(-\tilde{\beta}_+\hat{A}^\dagger\hat{A}\right)$ は

$$\exp\left(-\tilde{\beta}_+\hat{A}^\dagger\hat{A}\right) = \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}_+\tilde{n}}|\tilde{n}\rangle_A\langle\tilde{n}|_A$$

のように負の固有値を持たないが，$\exp\left(-\left(\tilde{\beta}_e+i\pi\right)\hat{B}^\dagger\hat{B}\right)$ には以下のように負の固有値がある．

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\left(\tilde{\beta}_e+i\pi\right)\hat{B}^\dagger\hat{B}\right)\\&=\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty}e^{-\left(\tilde{\beta}_e+i\pi\right)\tilde{n}}|\tilde{n}\rangle_B\langle\tilde{n}|_B\\&=\sum_{\tilde{m}=0}^{\infty}e^{-2\tilde{m}\tilde{\beta}_e}|2\tilde{m}\rangle_B\langle 2\tilde{m}|_B-\sum_{\tilde{m}=0}^{\infty}e^{-(2\tilde{m}+1)\tilde{\beta}_e}|2\tilde{m}+1\rangle_B\langle 2\tilde{m}+1|_B.\end{aligned}$$

従って $U\left(S'_{nonlocal}\right)\hat{\rho}'^{T_A}_{AB}U^\dagger\left(S'_{nonlocal}\right)$ には自然数 $\tilde{n},\tilde{m}$ に対応する

$$-\frac{e^{-\tilde{\beta}_+\tilde{n}}}{Z(\tilde{\beta}_+)}\frac{e^{-(2\tilde{m}+1)\tilde{\beta}_e}}{Z(\tilde{\beta}_e+i\pi)}$$

の負固有値があることが分かる．ここで $Z(\tilde{\beta})$ は分配関数

$$Z(\tilde{\beta})=\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty}e^{-\tilde{\beta}\tilde{n}}=\frac{1}{1-e^{-\tilde{\beta}}}$$

である．従って $0\le\tilde{\nu}_-<1/2$ の時のネガティビティは

$$\begin{aligned}\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]&=\frac{1}{Z(\tilde{\beta}_+)Z(\tilde{\beta}_e+i\pi)}\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty}\sum_{\tilde{m}=0}^{\infty}e^{-\tilde{\beta}_+\tilde{n}}e^{-(2\tilde{m}+1)\tilde{\beta}_e}\\&=\frac{1}{Z(\tilde{\beta}_e+i\pi)}\sum_{\tilde{m}=0}^{\infty}e^{-(2\tilde{m}+1)\tilde{\beta}_e}\\&=\frac{e^{-\tilde{\beta}_e}Z(2\tilde{\beta}_e)}{Z(\tilde{\beta}_e+i\pi)}\end{aligned}$$

という計算から

$$\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]=\frac{1}{e^{\tilde{\beta}_e}-1}=\frac{1}{4\tilde{\nu}_-}-\frac{1}{2}$$

と求められる．量子縺れのない場合には $\tilde{\nu}_-\ge1/2$ から $\Xi\left[\hat{\rho}_{AB}\right]=0$ となる．(E.13) 式とともにまとめると (4.68) 式のガウス状態に対するネガティビティの公式を得る．

参考文献

[1] S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006).

[2] A. Kitaev and J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110404 (2006).

[3] M. Levin and X-G. Wen, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110405 (2006).

[4] G. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 220405 (2007).

[5] C. H. Bennett and G. Brassard, "Quantum Cryptography: Public key distribution and coin tossing", in Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, p.175 (1984).

[6] 物理系向けの量子計算入門書としては以下のものがある．
細谷暁夫,『量子コンピュータの基礎』，数理科学 SGC ライブラリ **4**（サイエンス社）.

[7] W. K. Wootters and W. H. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1982).

[8] 量子フィッシャー情報量の一般論に関しては文献 [9] の日本語の教科書でも扱われている．極小結合定数の量子パラメータ推定は以下の論文で扱われている．
M. Hotta, T. Karasawa and M. Ozawa, *Phys. Rev.* **A72**, 052334 (2005): M. Hotta, T. Karasawa and M. Ozawa, *J. Phys. A: Math. G.* **39**,14465 (2006).

[9] 林正人,『量子情報理論入門』，数理科学 SGC ライブラリ **32** （サイエンス社）.

[10] H. Barnum, C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa and B. Schumacher, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2818 (1996).

[11] D. Bruss, A. Ekert, C. Macchiavello, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2598 (1998).

[12] R. Derka, V. Buzek, A. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1571 (1998).

[13] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, 1932).

[14] H. Everett, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454 (1957).

[15] 一般的な量子測定の理論に関しては M. Ozawa, *Ann. Phys.* **311**, 350 (2004) とその参考文献を参照のこと．日本語の教科書では文献 [9] や文献 [16] でも扱われている．

[16] 石坂智，小川朋宏，河内亮周，木村元，林正人,『量子情報科学入門』（共立出版）.

[17] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79 (1984).

[18] 詳しくは文献 [9], [16], [21] 等を参照.

[19] W. F. Stinespring, *Proc. Am. Math. Soc.* **6**, 211 (1955).

[20] K. Kraus, "States, Effects and Operations", in *Lecture Notes in Physics*, Vol.**190** (Springer, Berlin, 1983).

[21] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[22] A. Jamiołkowski, *Rep. Math. Phys.* **3**, 275 (1972).

[23] M.-D. Choi, *Can. J. Math.* **24**, 520 (1972).

[24] G.-C. Ghirardi, L. Marinatto and T. Weber, *J. Stat. Phys.* **108**, 49 (2002).

[25] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).

[26] T. Ichikawa, T. Sasaki and I. Tsutsui, *J. Math. Phys.* **51**, 062202 (2010).

[27] T. Sasaki, T. Ichikawa and I. Tsutsui, *Phys. Rev.* **A83**, 012113 (2011).

[28] G. Vidal, *J. Mod. Opt.* **47**, 355 (2000).

[29] 日合文雄，柳研二郎,『ヒルベルト空間と線形作用素』（牧野書店，1995）.

[30] A. Renyi, *Probability Theory*, (North–Holland, Amsterdam, 1970).

[31] M. A. Nielsen, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 436 (1999).

[32] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, *Phys. Rev.* **A62**, 062314 (2000).

[33] H. Reeh, S. Schlieder, *Nuovo Cimento* **22**, 105 (1961).

[34] J. Eisert, C. Simon, M. B. Plenio, *J. Phys.* **A35**, 3911 (2002).

[35] M. Horodecki, *Open Syst. Inf. Dyn.* **12**, 231 (2005).

[36] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).

[37] G. Vidal and R. F. Werner, *Phys. Rev.* **A65**, 032314 (2002).

[38] M. Frey, K. Gerlach and M. Hotta, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 455304 (2013).

[39] R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).

[40] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

[41] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **18**, 756 (1977).

[42] W. M. Itano, D. J. Heinsen, J. J. Bokkinger and D. J. Wineland, *Phys. Rev.* **A41**, 2295 (1990).

[43] M. Hotta and M. Morikawa, *Phys. Rev.* **A69**, 052114 (2004).

[44] M. Hotta and M. Morikawa, *Phys. Lett.* **A326**, 32 (2004).

[45] 一方向性条件に関しては文献 [43], [44] 以外にも文献 [46], [47] も参照のこと.

[46] M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 631 (1998).

[47] M. Ozawa, *Phys. Lett.* **A356**, 411 (2006).

[48] A. G. Kofman and G. Kurizki, *Nature*, **405**, 546 (2000).

[49] K. Koshino and A. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 030401 (2004).

[50] C. W. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Revised Edition, (Cambridge University Press, 1993).

[51] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D14**, 870 (1976).

[52] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).

[53] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D15**, 2752 (1977).

[54] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, 1982).

[55] R. P. Feynman and F. L. Vernon, *Ann. Phys.* **24**, 118 (1963).

[56] M. Hotta, I. Joichi, Sh. Matsumoto and M. Yoshimura, *Phys. Rev.* **D55**, 4614 (1997).

[57] S. Takagi, Vacuum Noise and Stress Induced by Unform Acceleration, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **88** (1986).

[58] H. Ooguri, *Phys. Rev.* **D33**, 3573 (1986).

[59] G. L. Sewell, *Ann. Phys.* (N.Y.) **141**, 201 (1982).

[60] W. G. Unruh and N. Weiss, *Phys. Rev.* **D29**, 1656 (1984).

[61] L. Bombelli, R. K. Koul, J. H. Lee and R. D. Sorkin, *Phys. Rev.* **D34**, 373 (1986).

[62] M. Srednicki, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 666 (1993).

[63] L. Susskind and J. Uglum, *Phys. Rev.* **D50**, 2700 (1994).

[64] C. Holzhey, F. Larsen, F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B424**, 443 (1994).

[65] F. Larsen and F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B458**, 249 (1996).

[66] J. Eisert, M. Cramer, M. B. Plenio, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 277 (2010).

[67] J. S. Dowker, *Class. Quant. Grav.* **11**, L55 (1994).

[68] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D13**, 2188 (1976).

[69] F. Wilczek, "Quantum Purity at a Small Price: Easing a Black Hole Paradox", in Proceedings of Houston Conference on Black Holes, Membranes, Wormholes and Superstrings, ed. S. Kalara and D. Nanopoulos (World Scientific, Singapore, 1992).

[70] M. Hotta, M. Shino and M. Yoshimura, *Prog. Theor. Phys.* **91**, 839 (1994).

[71] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 434 (1973) ; *J. Math. Phys.* **14**, 1938 (1973).

[72] M. Hotta, J. Matsumoto and K. Funo, arXiv:1306.5057.

[73] J. Knight, *Math. Phys. Appl. Math.* 2, **459** (1961).

[74] S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D14**, 2460 (1976).

[75] S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D72**, 084013 (2005).

[76] Y. Aharonov, A. Casher, and S. Nussinov, *Phys. Lett.* **B191**, 51 (1987).

[77] L. Susskind, L. Thorlacius and J. Uglum, *Phys. Rev.* **D48**, 3743 (1993).

[78] C. R. Stephens, G. 't Hooft and B. F. Whiting, *Class. Quant.Grav.* **11**, 621 (1994).

[79] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, J. Sully, *J. High Energy Phys.* **02**, 062 (2013).

[80] E. E. Flanagan, *Phys. Rev.* **D56**, 4922 (1997).

[81] M. Hotta, *Phys. Lett.* **A372**, 5671 (2008).

[82] M. Hotta, *Phys. Rev.* **D78**, 045006 (2008).

[83] M. Hotta, *J. Phys. Soc. Jap.* **78**, 034001 (2009).

[84] M. Hotta, *Phys. Lett.* **A374**, 3416 (2010).

[85] Y. Nambu and M. Hotta, *Phys. Rev.* **A82**, 042329 (2010).

[86] M. Hotta, *Phys. Rev.* **A87**, 032313 (2013).

[87] M. Hotta, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 105305 (2010).

[88] G. Yusa, W. Izumida and M. Hotta, *Phys. Rev.* **A84**, 032336 (2011).

[89] G. Yusa, J. Matsumoto and M. Hotta, arXiv:1305.3955.

[90] M. Hotta, *Phys. Rev.* **D81**, 044025 (2010).

[91] T. Sagawa, *Thermodynamics of Information Processing in Small Systems*, (Springer Thesis, 2013).

[92] P. Hayden and J. Preskill, *JHEP* **0709** :120 (2007).

[93] J. Williamson, *Am. J. Math.* **58**, 141 (1936).

索　　引

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

ラ

著 者 略 歴

堀田 昌寛
ほった まさひろ

1993 年　東北大学大学院理学研究科博士課程修了
　　　　博士（理学）
［1990 年〜1993 年　日本学術振興会特別研究員］
現　在　東北大学大学院理学研究科物理学専攻助教
専　門　量子情報物理学・一般相対論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-103
『量子情報と時空の物理　量子情報物理学入門』
著　者　堀田 昌寛
2014 年 1 月 25 日　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木 下 敏 孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　ⓒ　株式会社　サ イ エ ン ス 社　　TEL.(03)5474-8500(代表)
〒151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　　(03)5474-8600(広告部)

組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤 眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博